3 1761 05294192 9

(85) 285

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

21
E4184

MATHEMATISCHE WERKE

VON

KARL WEIERSTRASS.

HERAUSGEGEBEN
UNTER MITWIRKUNG EINER VON DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN EINGESETZTEN COMMISSION.

ERSTER BAND.

ABHANDLUNGEN I.

60498
16 | 9 | 03

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1894.

Übersetzungsrecht vorbehalten.

QA
3
W45
Bd. 1

VORWORT.

Bereits vor mehr als fünf Jahren hatte ich mich entschlossen, eine Gesammtausgabe meiner mathematischen Werke zu veranstalten. Aber ich hatte kaum mit den dazu erforderlichen Vorarbeiten begonnen, als mich ein hartnäckiges Leiden heimsuchte, das mich jahrelang vollständig arbeitsunfähig machte. Erst im vergangenen Sommer besserte sich der Zustand meiner Gesundheit soweit, dass ich hoffen durfte, es würde sich mein Vorhaben unter bestimmten Bedingungen doch noch durchführen lassen. Allerdings konnte ich bei meinem hohen Alter nicht mehr erwarten, dass es mir möglich sein werde, das geplante Werk in der ursprünglich beabsichtigten Weise zu Ende zu führen; ich musste daher dafür Sorge tragen, dass auch im Falle meines Todes oder einer längeren Erkrankung die Herausgabe keine Unterbrechung erfahren werde. Dazu hat sich nun durch das bereitwillige Entgegenkommen der hiesigen Akademie der Wissenschaften ein Weg finden lassen. Die Akademie hat aus ihrer Mitte eine Commission von vier Mitgliedern ernannt, welche die Herausgabe der in Rede stehenden Arbeiten überwachen und sich im Falle eines etwaigen Abgangs eines Mitgliedes durch freie Wahl ergänzen soll. Diese Commission, welche zur Zeit aus den Herren Auwers, Frobenius, Schwarz und mir besteht, hat mit der eigentlichen Herausgabe die Herren Hettner, Knoblauch, Fritz Kötter, Phragmén und Stickelberger betraut. Einige andere Herren, deren Namen am Schlusse der einzelnen Bände genannt werden sollen, sind an der Her-

ausgabe durch die Revision und Correctur specieller Abhandlungen betheiligt. Alle diese Herren haben die ihnen zugedachten Arbeiten bereitwilligst übernommen, wofür ich ihnen an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche. Dieses gilt namentlich von Herrn Knoblauch, dessen thätigem und umsichtigem Vorgehen es hauptsächlich zu verdanken ist, dass der erste Band in verhältnissmässig kurzer Zeit hat fertig gestellt werden können.

Berlin, den 15. Mai 1894.

Karl Weierstrass.

INHALTS-VERZEICHNISS.

		Seite
1.	Über die Entwicklung der Modular-Functionen	1—49.
	Anmerkung	50.
2.	Darstellung einer analytischen Function einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt	51—66.
3.	Zur Theorie der Potenzreihen	67—74.
4.	Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen	75—84.
	Anmerkung	85.
5.	Bemerkungen über die analytischen Facultäten . . . . . (Jahresbericht über das Königl. Progymnasium in Dt. Crone vom Herbst 1842 bis zum Herbst 1843, S. 3—17.)	87—103.
6.	Reduction eines bestimmten dreifachen Integrals	105—109.
7.	Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale . . . . . (Jahresbericht über das Königl. Katholische Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre 1848/49, S. 3—23.)	111—131.
8.	Zur Theorie der Abel'schen Functionen . . . . . (Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 47 (1854), S. 289—306.)	133—152.
	Anmerkung	152.
9.	Über die Theorie der analytischen Facultäten . . . . . (Crelle's Journal Bd. 51 (1856), S. 1—60; Abhandlungen aus der Functionenlehre (Berlin 1886), S. 183—260.)	153—221.
10.	Akademische Antrittsrede . . . . . (Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1857, S. 348—351.)	223—226.
11.	Über die Integration algebraischer Differentiale vermittelst Logarithmen (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1857, S. 148—154.)	227—232.

Seite

12. Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen . . . . . 233—246.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1858, S. 207—220.)

13. Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra . . . . . 247—256.

14. Über die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid . . . . 257—266.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1861, S. 986—997.)

15. Bemerkungen über die Integration der hyperelliptischen Differential-Gleichungen . . . . . 267—273.
(Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1862, S. 127—133.)

16. Zur Integration der linearen partiellen Differential-Gleichungen mit constanten Coefficienten . . . . . 275—295.
(Acta mathematica Bd. 6 (1884), S. 254—279.)
Anmerkung . . . . . 296.

17. Theorie der Abel'schen Functionen . . . . . 297—355.
(Crelle's Journal Bd. 52 (1856), S. 285—339.)
Anmerkungen . . . . . 356.

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER MODULAR-FUNCTIONEN.

In der Einleitung zu dem »Précis d'une théorie des fonctions elliptiques« von Abel (Crelle's Journal, B. 4, S. 244; vgl. B. 6, S. 76) findet sich die Bemerkung, dass die Modular-Function $\mathrm{sn}u$ — von Abel a. a. O. durch $\lambda(u)$ bezeichnet — ausgedrückt werden könne als Quotient zweier nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und beständig convergirenden Reihen, deren Coefficienten ganze Functionen des Moduls sind. Der vorliegende Aufsatz enthält einen Versuch, die Entwicklung dieser Reihen, sowie ähnlicher für die übrigen Modular-Functionen, auszuführen und zugleich nachzuweisen, wie von ihnen auf eine einfache Weise zu den übrigen bekannten Darstellungen dieser Functionen übergegangen werden kann. Es erschien zweckmässig, bei der ganzen Entwicklung nur die Fundamental-Eigenschaften der Modular-Functionen vorauszusetzen, sowie auch besonders darauf gesehen worden ist, die Gültigkeit der Formeln auch für imaginäre Werthe des Arguments und des Moduls zu zeigen.

§ 1.

Aus den zur Definition der Modular-Functionen $\mathrm{sn}u$, $\mathrm{cn}u$, $\mathrm{dn}u$ mit dem gemeinschaftlichen Modul k dienenden Differential-Gleichungen

$$(1.)\quad \frac{\partial \mathrm{sn}u}{\partial u} = \mathrm{cn}u\,\mathrm{dn}u, \qquad \frac{\partial \mathrm{cn}u}{\partial u} = -\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u, \qquad \frac{\partial \mathrm{dn}u}{\partial u} = -k^2\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u,$$

zu denen noch die nähere Bestimmung kommt, dass für $u = 0$ $\mathrm{sn}\,u = 0$, $\mathrm{cn}\,u = 1$, $\mathrm{dn}\,u = 1$ sein soll, lassen sich für diese Functionen zunächst unendliche Reihen von der Form

$$(2.) \qquad \begin{cases} \mathrm{sn}\,u = u + a_1 u^3 + \cdots + a_r u^{2r+1} + \cdots \\ \mathrm{cn}\,u = 1 + b_1 u^2 + \cdots + b_r u^{2r} + \cdots \\ \mathrm{dn}\,u = 1 + c_1 u^2 + \cdots + c_r u^{2r} + \cdots \end{cases}$$

herleiten, in welchen die Coefficienten ganze Functionen von k^2 sind, deren nähere Kenntniss für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich ist. Diese Reihen können nun zwar nicht immer convergent sein, wie man sich leicht überzeugt; man darf aber annehmen, dass sie es für jeden reellen und imaginären Werth von u sind, dessen absoluter Betrag eine bestimmte, von dem jedesmaligen Werthe des Moduls abhangende Grenze nicht überschreitet.[1]) Aus den Formeln, welche $\mathrm{sn}(u+v)$, $\mathrm{cn}(u+v)$, $\mathrm{dn}(u+v)$ durch $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$, $\mathrm{sn}\,v$, $\mathrm{cn}\,v$, $\mathrm{dn}\,v$ ausdrücken, ist ferner sofort ersichtlich, dass sich $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ rational durch $\mathrm{sn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{cn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{dn}\frac{u}{n}$ ausdrücken lassen, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, in der Art, dass man

$$(3.) \qquad \mathrm{sn}\,u = \frac{P}{S}, \qquad \mathrm{cn}\,u = \frac{Q}{S}, \qquad \mathrm{dn}\,u = \frac{R}{S}$$

hat, wo P, Q, R, S ganze Functionen von $\mathrm{sn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{cn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{dn}\frac{u}{n}$ sind. Werden für $\mathrm{sn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{cn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{dn}\frac{u}{n}$ ihre Reihen-Entwicklungen substituirt, so gehen auch P, Q, R, S in unendliche, nach ganzen Potenzen von u fortschreitende Reihen über; und wenn angenommen wird, dass die Reihen (2.) convergiren, sobald der absolute Betrag von u kleiner als eine bestimmte Grösse a ist, so sind die Reihen für $\mathrm{sn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{cn}\frac{u}{n}$, $\mathrm{dn}\frac{u}{n}$ und demnach auch die Reihen-Entwicklungen von P, Q, R, S convergent für jedes u, dessen absoluter Betrag kleiner als na ist. Da nun na mit n ohne Ende wächst, so steht zu erwarten, dass P, Q, R, S für $n = \infty$ in solche Reihen übergehen, die beständig convergiren, und man auf diesem Wege zu Entwicklungen der Modular-Functionen gelangen werde, die für jeden beliebigen Werth des Arguments gültig bleiben. Dies ist jetzt durch eine nähere Betrachtung der Ausdrücke P, Q, R, S zu bestätigen. Man hat

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log \operatorname{sn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2 - \dfrac{1}{\operatorname{sn} u^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log \operatorname{cn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2 - \dfrac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log \operatorname{dn} u}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2 - \dfrac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}, \end{cases}$$

und daher

$$(5.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} + \dfrac{S^2}{P^2} = \dfrac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 P^2}{S^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} + \dfrac{R^2}{Q^2} = \dfrac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 P^2}{S^2} \\ \dfrac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 Q^2}{R^2} = \dfrac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 P^2}{S^2}. \end{cases}$$

Durch die Entwicklung der logarithmischen Differentiale erhält z. B. die erste Gleichung die Gestalt

$$\frac{P\dfrac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \dfrac{\partial P}{\partial u}\dfrac{\partial P}{\partial u} + S^2}{P^2} = \frac{S\dfrac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \dfrac{\partial S}{\partial u}\dfrac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2}{S^2}.$$

Ohne die entwickelten Ausdrücke von P, S zu kennen, lässt sich doch aus der Art, wie sie aus den Grundformeln abgeleitet werden können, über ihre Form Folgendes angeben. (Vgl. Abel Précis § 4.) Es werde $\frac{u}{n} = v$ gesetzt, und es mögen die grossen deutschen Buchstaben überhaupt ganze Functionen von $\operatorname{sn} v$ bezeichnen, wo dann der Grad durch einen beigefügten Index angedeutet werden kann, so ist

I. wenn n ungrade,

$$P = \mathfrak{A}_{nn}, \qquad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{n} \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \, \mathfrak{B}_{nn-1},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}_{nn+2}, \qquad \frac{\partial P^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}_{2nn+2},$$

$$S = \mathfrak{A}'_{nn-1}, \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \, \mathfrak{B}'_{nn-2},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_{nn-1}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \frac{\partial \mathfrak{A}'_{nn-1}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}'_{nn+1}, \qquad \frac{\partial S^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}'_{2nn},$$

II. wenn n grade,

$$P = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \mathfrak{A}_{nn-3}, \qquad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{1}{n} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial \mathfrak{A}_{nn-3}}{\partial \operatorname{sn} v} + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \mathfrak{A}_{nn-3} = \mathfrak{B}_{nn},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{\partial \mathfrak{B}_{nn}}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \mathfrak{C}_{nn-1}, \qquad P^2 = \mathfrak{D}_{2nn-2}, \qquad P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \mathfrak{E}_{2nn},$$

$$S = \mathfrak{A}'_{nn}, \qquad \frac{\partial S}{\partial u} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \mathfrak{B}'_{nn-1},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{1}{n^2} \operatorname{cn} v^2 \operatorname{dn} v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}'_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v^2} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2 \operatorname{sn} v}{\partial v^2} \frac{\partial \mathfrak{A}'_{nn}}{\partial \operatorname{sn} v} = \mathfrak{C}'_{nn+2}, \qquad \frac{\partial S^2}{\partial u^2} = \mathfrak{D}'_{2nn+2}.$$

Ferner sind

$$P^2, \quad P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u}, \quad S^2, \quad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u}$$

grade Functionen von $\operatorname{sn} v$, und der Coefficient von $\operatorname{sn} v^2$ in S ist gleich 0. Hieraus erhellt, dass die Ausdrücke

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + S^2, \qquad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2$$

ganze, und zwar grade Functionen von $\operatorname{sn} v$ sind, deren Grad um zwei Einheiten höher als resp. der Grad von P^2 und S^2 ist. Da ferner P^2, S^2 keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so muss vermöge der obigen Gleichung der erste Ausdruck durch P^2, der zweite durch S^2 theilbar, und der Quotient für beide derselbe sein. Man kann daher setzen

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} - \frac{\partial P}{\partial u} \frac{\partial P}{\partial u} + S^2 = (g + h \operatorname{sn} v^2) P^2, \qquad S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2 = (g + h \operatorname{sn} v^2) S^2,$$

wo g, h von u unabhängig sind. Wird $u = 0$ gesetzt, so ergiebt sich aus der zweiten Gleichung $g = 0$. Ferner, wenn l den Coefficienten der höchsten in P, S vorkommenden Potenz von $\operatorname{sn} v$ bezeichnet, so erhält man mit Rücksicht auf das über die Form von P, S etc. Bemerkte für den Fall, dass n ungrade ist, aus der ersten der vorstehenden Gleichungen

$$\frac{n^2(n^2-1)}{n^2} k^2 l^2 + \frac{2k^2 n^2}{n^2} l^2 - \frac{k^2 n^4}{n^2} l^2 = h l^2, \text{ d. h. } h = k^2;$$

und wenn n grade ist, so giebt die zweite Gleichung denselben Werth für h. Man hat daher

$$S \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} - \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial u} + k^2 P^2 = k^2 \operatorname{sn} v^2 S^2,$$

oder

$$\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + k^2 \frac{P^2}{S^2} = k^2 \left(\operatorname{sn} \frac{u}{n}\right)^2.$$

Hiernach erhält man aus (5.)

$$(6.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} + \dfrac{1}{\operatorname{sn} u^2} - k^2 \left(\operatorname{sn} \dfrac{u}{n}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} + \dfrac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} - k^2 \left(\operatorname{sn} \dfrac{u}{n}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} + \dfrac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2} - k^2 \left(\operatorname{sn} \dfrac{u}{n}\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} + k^2 \operatorname{sn} u^2 - k^2 \left(\operatorname{sn} \dfrac{u}{n}\right)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Nun können $\frac{1}{\operatorname{sn} u^2}$, $\frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}$, $\frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}$, $k^2 \operatorname{sn} u^2$ in Reihen von der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{sn} u^2} &= \frac{1}{u^2} + 1 + \alpha_1 u^2 + \cdots + \alpha_r u^{2r} + \cdots \\ \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2} &= 1 + \beta_1 u^2 + \cdots + \beta_r u^{2r} + \cdots \\ \frac{k^2 \operatorname{sn} u^2}{\operatorname{dn} u^2} &= k^2 + \gamma_1 u^2 + \cdots + \gamma_r u^{2r} + \cdots \\ k^2 \operatorname{sn} u^2 &= k^2 u^2 + \delta_2 u^4 + \cdots + \delta_r u^{2r} + \cdots \end{aligned}$$

entwickelt werden. Setzt man dann

$$\begin{aligned} -\log u + \frac{u^2}{2} + \alpha_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \alpha_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \varphi(u) \\ \frac{u^2}{2} + \beta_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \beta_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \psi(u) \\ \frac{k^2 u^2}{2} + \gamma_1 \frac{u^4}{3.4} + \cdots + \gamma_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \chi(u) \\ \frac{k^2 u^4}{3.4} + \delta_2 \frac{u^6}{5.6} + \cdots + \delta_r \frac{u^{2r+2}}{(2r+1)(2r+2)} + \cdots &= \vartheta(u), \end{aligned}$$

so dass

$$\frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial u^2} = \frac{1}{\operatorname{sn} u^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi(u)}{\partial u^2} = \frac{\operatorname{dn} u^2}{\operatorname{cn} u^2}, \quad \frac{\partial^2 \chi(u)}{\partial u^2} = \frac{k^2 \operatorname{cn} u^2}{\operatorname{dn} u^2}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta(u)}{\partial u^2} = k^2 \operatorname{sn} u^2$$

ist, und

$$\operatorname{Al}(u)_1 = e^{-\varphi(u)}, \quad \operatorname{Al}(u)_2 = e^{-\psi(u)}, \quad \operatorname{Al}(u)_3 = e^{-\chi(u)}, \quad \operatorname{Al}(u) = e^{-\vartheta(u)},$$

so können $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ in Reihen von der Form

$$(7.)\qquad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)_1 = u + A_1 u^3 + \cdots + A_r u^{2r+1} + \cdots \\ \mathrm{Al}(u)_2 = 1 + B_1 u^2 + \cdots + B_r u^{2r} + \cdots \\ \mathrm{Al}(u)_3 = 1 + C_1 u^2 + \cdots + C_r u^{2r} + \cdots \\ \mathrm{Al}(u) = 1 + D_2 u^4 + \cdots + D_r u^{2r} + \cdots \end{cases}$$

entwickelt werden, und es ist

$$(8.)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2} + \frac{1}{\mathrm{sn}\, u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2} + \frac{\mathrm{dn}\, u^2}{\mathrm{cn}\, u^2} = 0, \\ &\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2} + \frac{k^2 \mathrm{cn}\, u^2}{\mathrm{dn}\, u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} + k^2 \mathrm{sn}\, u^2 = 0. \end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichungen mit (6.), so erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \log P}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_1}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_2}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \log R}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)_3}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \log S}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial^2 \log D\left(\frac{u}{n}\right)}{\partial u^2} = 0, \end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man zugleich beachtet, dass zufolge der angegebenen Form von P, Q, R, S die Reihen-Entwicklungen dieser Ausdrücke ganz dieselbe Form haben, wie die Reihen (7.),

$$(9.)\qquad \begin{cases} \mathrm{Al}(u)_1 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot P, \qquad \mathrm{Al}(u)_2 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot Q, \\ \mathrm{Al}(u)_3 = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot R, \qquad \mathrm{Al}(u) = D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right) \cdot S \end{cases}$$

und

$$(10.)\quad \mathrm{sn}\, u = \frac{P}{S} = \frac{\mathrm{Al}(u)_1}{\mathrm{Al}(u)}, \qquad \mathrm{cn}\, u = \frac{Q}{S} = \frac{\mathrm{Al}(u)_2}{\mathrm{Al}(u)}, \qquad \mathrm{dn}\, u = \frac{R}{S} = \frac{\mathrm{Al}(u)_3}{\mathrm{Al}(u)}.$$

Nimmt man nun wie vorhin an, dass die Reihen (2.) bei einem bestimmten Werth von k convergiren für alle Werthe von u, deren absoluter Betrag kleiner als a ist, so sind auch — nach bekannten elementaren Sätzen — die

Reihen für $k^2 \operatorname{sn} u^2$, $\vartheta(u)$, und — weil die Exponential-Reihe beständig convergirt — auch die Reihe, worin $D(u) = e^{-\vartheta(u)}$ entwickelt ist, sicher für dieselben Werthe von u convergent. Die Reihe für $D\left(\frac{u}{n}\right)$, und mithin auch die für $D^{nn}\left(\frac{u}{n}\right)$ convergirt also, sobald der absolute Betrag von u kleiner als na ist; für einen solchen Werth sind aber, wie schon bemerkt, auch die Reihen-Entwicklungen von P, Q, R, S, und somit vermöge der Gleichungen (9.), auch die von $\operatorname{Al}(u)_1$, $\operatorname{Al}(u)_2$, $\operatorname{Al}(u)_3$, $\operatorname{Al}(u)$ convergent. Da aber diese letzteren von n unabhängig sind, na aber beliebig gross angenommen werden kann, so folgt, dass die Convergenz stattfinden muss für jeden noch so grossen, d. h. für jeden beliebigen Werth von u. Jede der Modular-Functionen $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ lässt sich demnach als Quotient zweier nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und für jeden Werth von u, wie von k convergirenden Reihen darstellen. Die Coefficienten dieser Reihen sind, wie aus der vorstehenden Entwicklung ersichtlich ist, ganze Functionen von k^2.

Die Gleichungen (8.) lassen sich nun auch so schreiben

$$(11.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{Al}(u)_1 \frac{\partial^2 \operatorname{Al}(u)_1}{\partial u^2} - \frac{\partial \operatorname{Al}(u)_1}{\partial u}\frac{\partial \operatorname{Al}(u)_1}{\partial u} + \operatorname{Al}(u)^2 = 0\\
&\operatorname{Al}(u)_2 \frac{\partial^2 \operatorname{Al}(u)_2}{\partial u^2} - \frac{\partial \operatorname{Al}(u)_2}{\partial u}\frac{\partial \operatorname{Al}(u)_2}{\partial u} + \operatorname{Al}(u)_3^2 = 0\\
&\operatorname{Al}(u)_3 \frac{\partial^2 \operatorname{Al}(u)_3}{\partial u^2} - \frac{\partial \operatorname{Al}(u)_3}{\partial u}\frac{\partial \operatorname{Al}(u)_3}{\partial u} + k^2 \operatorname{Al}(u)_2^2 = 0\\
&\operatorname{Al}(u) \frac{\partial^2 \operatorname{Al}(u)}{\partial u^2} - \frac{\partial \operatorname{Al}(u)}{\partial u}\frac{\partial \operatorname{Al}(u)}{\partial u} + k^2 \operatorname{Al}(u)_1^2 = 0,
\end{aligned}\right.$$

und vermittelst dieser Gleichungen liessen sich die Coefficienten der Reihen (7.) vollständig bestimmen. Man kann aber, wenn man auch den Modul als veränderlich ansieht, partielle Differential-Gleichungen herleiten, welche für die Reihen-Entwicklungen bei weitem geeigneter sind.

§ 2.

Es werde

$$\operatorname{sn} u = x, \qquad \operatorname{cn} u = y, \qquad \operatorname{dn} u = z,$$
$$\operatorname{Al}(u)_1 = p, \qquad \operatorname{Al}(u)_2 = q, \qquad \operatorname{Al}(u)_3 = r, \qquad \operatorname{Al}(u) = s$$

gesetzt. Man hat

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2+\ k^2x^4$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \ = \ -(1+k^2)x+2k^2x^3.$$

Differentiirt[2]) man die erste Gleichung nach k, so ergiebt sich

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial k} = [-(1+k^2)x+2k^2x^3]\frac{\partial x}{\partial k}-kx^2(1-x^2),$$

oder, wegen der zweiten,

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial k}-\dfrac{\partial x}{\partial k}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2} = -\frac{kx^2}{1-k^2x^2} = -\frac{kx^2}{z^2} = -\frac{1}{k}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{k}.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial^2 \log z}{\partial u^2} = -z^2+\frac{k'^2}{z^2} = -1+k^2x^2+\frac{k'^2}{z^2},$$

oder weil (§ 1, 8.) $k^2x^2 = -\dfrac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}$ ist,

$$\frac{k'^2}{z^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \log s}{\partial u}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial u}+u\right)}{\partial u} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \log s}{\partial u}-\dfrac{k^2xy}{z}+u\right)}{\partial u}.$$

Multiplicirt man daher die vorangehende Gleichung mit $k(1-k^2)$, so kommt

$$k(1-k^2)\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\partial k}-\dfrac{\partial x}{\partial k}\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2} = -\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \log s}{\partial u}-\dfrac{k^2xy}{z}+u\right)}{\partial u}+1-k^2,$$

woraus, wenn man nach u integrirt,

$$k(1-k^2)\frac{\dfrac{\partial x}{\partial k}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}} = -k^2u-\frac{\partial \log s}{\partial u}+\frac{k^2xy}{z},$$

oder

$$(1.) \qquad k(1-k^2)\frac{\partial x}{\partial k} = -\left(k^2u+\frac{\partial \log s}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+k^2x(1-x^2)$$

folgt. Differentiirt man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}+k^2x^2 \ = \ 0$$

nach u und k, so erhält man

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 x \frac{\partial x}{\partial u} = 0$$
$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^2 \partial k} + 2k^2 x \frac{\partial x}{\partial k} + 2kx^2 = 0.$$

Vermittelst dieser beiden Gleichungen kann man $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial k}$ aus (1.) eliminiren, und erhält dann

$$k(1-k^2)\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^2 \partial k} + k^2 u \frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 x^2 - 2k^4 x^4 = 0.$$

Diese Gleichung werde in Beziehung auf u integrirt, so findet sich, wenn man bemerkt, dass

$$\int_0 u \frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} \partial u = u \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - \frac{\partial \log s}{\partial u}$$
$$\int_0 \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} \partial u = \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - \int_0 \left(\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2}\right)^2 \partial u$$
$$= \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - k^4 \int_0 x^4 \partial u$$
$$\int_0 k^2 x^2 \partial u = -\frac{\partial \log s}{\partial u}$$

ist,

$$k(1-k^2)\frac{\partial^2 \log s}{\partial u \partial k} + k^2 u \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - k^2 \frac{\partial \log s}{\partial u} - 2\frac{\partial \log s}{\partial u} - \frac{\partial \log s}{\partial u}\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} - 3k^4 \int_0 x^4 \partial u = 0.$$

Aus $\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + k^2 x^2 = 0$ folgt aber ferner

$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4} + 2k^2 \frac{\partial\left(x \frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4} + 2k^2 x \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2k^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 0,$$
$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial u^4} + 2k^2 - 4k^2(1+k^2)x^2 + 6k^4 x^4 = 0,$$

und hieraus durch Integration

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 u + 4(1+k^2)\frac{\partial \log s}{\partial u} + 6k^4 \int_0 x^4 \partial u = 0.$$

Wird diese Gleichung zu der vorhergehenden, die auch $\int_0 x^4 \partial u$ enthält, addirt, nachdem die letztere mit 2 multiplicirt worden, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^3 \log s}{\partial u^3} + 2k^2 u \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial \log s}{\partial u} \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2k^2 \frac{\partial \log s}{\partial u} + 2k(1-k^2) \frac{\partial^2 \log s}{\partial u \partial k} + 2k^2 u = 0,$$

und hieraus durch Integration in Beziehung auf u

$$\frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial \log s}{\partial u} + \left(\frac{\partial \log s}{\partial u}\right)^2 + 2k(1-k^2) \frac{\partial \log s}{\partial k} + k^2 u^2 = 0.$$

Substituirt man nun hier

$$\frac{\partial \log s}{\partial u} = \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 \log s}{\partial u^2} = \frac{1}{s} \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} - \frac{1}{s^2} \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2, \qquad \frac{\partial \log s}{\partial k} = \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial k},$$

und multiplicirt mit s, so kommt

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u \frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2) \frac{\partial s}{\partial k} + k^2 u^2 s = 0. \tag{2.}$$

Setzt man in (1.) $x = \frac{p}{s}$, so ergiebt sich

$$k(1-k^2) \frac{s \frac{\partial p}{\partial k} - p \frac{\partial s}{\partial k}}{s^2} + \left(k^2 u + \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial u}\right) \frac{s \frac{\partial p}{\partial u} - p \frac{\partial s}{\partial u}}{s^2} - k^2 \frac{p}{s} + k^2 \frac{p^2}{s^2} = 0,$$

oder, wenn man mit $2ps^2$ multiplicirt,

$$ps^2 \left(2k^2 u \frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2) \frac{\partial p}{\partial k}\right) - sp^2 \left(2k^2 u \frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2) \frac{\partial s}{\partial k}\right)$$
$$+ 2ps \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial u} - 2p^2 \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - k^2 p^2 s^2 + 2k^2 p^4 = 0.$$

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1 - (1+k^2)x^2 + k^2 x^4$$

folgt aber

$$s^2 \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - 2ps \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial u} + p^2 \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s^4 - (1+k^2) p^2 s^2 + k^2 p^4,$$

und wenn man vermittelst dieser Gleichung $2ps \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial u}$ aus der vorhergehenden eliminirt,

$$ps^2 \left(2k^2 u \frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2) \frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2) p\right) + s^2 \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 - s^4$$
$$= sp^2 \left(2k^2 u \frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2) \frac{\partial s}{\partial k}\right) + p^2 \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 - k^2 p^4.$$

Weil aber (§ 1, (8.))

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + s^2, \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + k^2 p^2$$

ist, so verwandelt sich diese Gleichung, durch ps dividirt, in:

$$s\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2)p\right) = p\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k}\right),$$

woraus vermöge (2.)

$$\text{(3.)} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2 u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2)p = 0$$

folgt. Aus der Gleichung $x^2+y^2 = 1$ ergiebt sich $s^2 = p^2+q^2$, und hieraus

$$s\frac{\partial s}{\partial u} = p\frac{\partial p}{\partial u} + q\frac{\partial q}{\partial u}, \quad s\frac{\partial s}{\partial k} = p\frac{\partial p}{\partial k} + q\frac{\partial q}{\partial k}, \quad s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2.$$

Setzt man in der dritten Gleichung

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + s^2, \quad \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + r^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + s^2 - k^2p^2, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + k^2p^2,$$

so findet sich

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + (1-k^2)p^2 + q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + q^2,$$

und daher

$$s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2u^2 s\right) = p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2)p\right)$$
$$+ q\left(\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial q}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k} + (1+k^2u^2)q\right),$$

oder wegen (2, 3)

$$\text{(4.)} \qquad \frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial q}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k} + (1+k^2u^2)q = 0.$$

Ferner hat man

$$s^2 = k^2p^2 + r^2, \qquad s\frac{\partial s}{\partial u} = k^2p\frac{\partial p}{\partial u} + r\frac{\partial r}{\partial u}, \qquad s\frac{\partial s}{\partial k} = k^2p\frac{\partial p}{\partial k} + r\frac{\partial r}{\partial k} + kp^2,$$

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = k^2p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + k^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2,$$

oder wegen

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + k^2p^2, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + s^2, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 = r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + k^2q^2 = r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + k^2s^2 - k^2p^2,$$

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = k^2p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - k^2(1-k^2)p^2 + r\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + k^2r^2,$$

und daher

$$s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2u^2s\right) = k^2p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2)p\right)$$
$$+ r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial r}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k} + (k^2+k^2u^2)r\right)$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial r}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k} + (k^2+k^2u^2)r = 0. \tag{5.}$$

Jede der Functionen

$$\mathrm{Al}(u)_1 = p, \qquad \mathrm{Al}(u)_2 = q, \qquad \mathrm{Al}(u)_3 = r, \qquad \mathrm{Al}(u) = s$$

genügt also einer linearen partiellen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung. Diese Gleichungen, welche zur Uebersicht hier zusammengestellt werden mögen,

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial p}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2u^2)p = 0\\
&\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial q}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k} + (1+k^2u^2)q = 0\\
&\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial r}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k} + (k^2+k^2u^2)r = 0\\
&\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial s}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2u^2s = 0
\end{aligned}\right. \tag{6.}$$

haben sämmtlich die Form

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial \chi}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \chi}{\partial k} + (\tau + k^2u^2)\chi = 0,$$

unter τ eine nur von k abhangende oder constante Grösse verstanden. Setzt man $\chi = \varepsilon\varphi$, und denkt sich unter ε eine Function von k allein, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \varphi}{\partial k} + k^2u^2\varphi + \left(\tau + 2\,\frac{k(1-k^2)}{\varepsilon}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial k}\right) = 0.$$

Nimmt man nun hier

$$\text{wie in (3.)} \quad \tau = 1-k^2, \quad \text{und setzt } \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\text{oder wie in (4.)} \quad \tau = 1, \quad \text{und setzt } \varepsilon = \sqrt{\frac{k'}{k}},$$

$$\text{oder wie in (5.)} \quad \tau = k^2, \quad \text{und setzt } \varepsilon = \sqrt{k'},$$

so wird in allen diesen Fällen

$$\tau + \frac{2k(1-k^2)}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial k} = 0,$$

und so erhellt, dass die vier Functionen

$$\sqrt{k}\cdot \mathrm{Al}(u)_1, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot \mathrm{Al}(u)_2, \qquad \sqrt{\frac{1}{k'}}\cdot \mathrm{Al}(u)_3, \qquad \mathrm{Al}(u)$$

sämmtlich einer und derselben partiellen Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial\varphi}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi}{\partial k} + k^2u^2\varphi = 0 \tag{7.}$$

Genüge leisten.

§ 3.

Vermittelst der im vorhergehenden § entwickelten Gleichungen gelangt man leicht zu den Reihen-Entwicklungen von $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$ u. s. w. Zuvor mögen aber folgende Relationen angemerkt werden. Aus den beiden Gleichungen

$$\mathrm{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}\,u$$

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} + k^2\,\mathrm{sn}\,u^2 = 0$$

ergiebt sich $\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(u)$, und hieraus in Verbindung mit den Formeln

$$\mathrm{sn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = k\,\mathrm{sn}\,u, \qquad \mathrm{cn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{dn}\,u, \qquad \mathrm{dn}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{cn}\,u$$

zusammengenommen

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}(u)_1, & \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}(u)_3, \\ \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_3 = \mathrm{Al}(u)_2, & \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(u). \end{array}\right. \tag{1.}$$

Es werde nun

$$\mathrm{Al}(u)_1 = p = u - A_1\frac{u^3}{3'} + A_2\frac{u^5}{5'} - \cdots + (-1)^n A_n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)'} + \cdots$$

gesetzt,[3]) oder

$$p = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

wo dann $A_0 = 1$ zu nehmen ist. Es möge hier zugleich bemerkt werden, dass überall, wo in diesem § griechische Buchstaben als Exponenten oder Indices vorkommen, dieselben durchaus ganze positive Zahlen, die Null mit eingeschlossen, bezeichnen sollen, und dass, wo in den folgenden Formeln ein Coefficient mit einem negativen Index erscheint, dieser gleich 0 zu setzen ist. Dann ist

$$u\frac{\partial p}{\partial u} = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma)'} = \mathrm{S}(-1)^\gamma (2\gamma+1) A_\gamma \frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma-1}}{(2\gamma-1)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma A_{\gamma+1}\frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'}, \qquad \frac{\partial p}{\partial k} = \mathrm{S}(-1)^\gamma \frac{\partial A_\gamma}{\partial k}\frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

$$u^2 p = \mathrm{S}(-1)^\gamma A_\gamma \frac{u^{2\gamma+3}}{(2\gamma+1)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma 2\gamma(2\gamma+1) A_{\gamma-1}\frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'},$$

und aus (§ 2, (3.)) ergiebt sich die Recursions-Formel

$$A_{\gamma+1} = [1 + (4\gamma+1)k^2] A_\gamma + 2k(1-k^2)\frac{\partial A_\gamma}{\partial k} - 2\gamma(2\gamma+1) A_{\gamma-1}. \qquad \text{(A)}$$

A_γ ist eine ganze Function von k; weil $\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}(u)_1$ ist, so muss

$$k^{2\gamma+1} A_\gamma\left(\frac{1}{k}\right) = k A_\gamma, \qquad k^{2\gamma} A_\gamma\left(\frac{1}{k}\right) = A_\gamma$$

sein, und daraus folgt, dass A_γ vom $(2\gamma)^{\text{ten}}$ Grade ist. Da überdies nur grade Potenzen von k vorkommen dürfen, so kann man setzen

$$A_\gamma = A_{0,\gamma} + A_{1,\gamma-1}k^2 + \cdots + A_{\gamma,0}k^{2\gamma} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha}.$$

Dann ist

$$A_{\gamma+1} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma+1)} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha}, \qquad A_\gamma = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma+1)} A_{\alpha,\beta-1} k^{2\alpha},$$

$$k^2 A_\gamma = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha+2} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma+1)} A_{\alpha-1,\beta} k^{2\alpha}, \qquad k\frac{\partial A_\gamma}{\partial k} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} 2\alpha A_{\alpha,\beta} k^{2\alpha} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma+1)} 2\alpha A_{\alpha,\beta-1} k^{2\alpha},$$

$$k^3\frac{\partial A_\gamma}{\partial k} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}\,2\alpha A_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2}} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}(2\alpha-2)A_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha}},$$

$$k^2 A_{\gamma-1} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma-1)}{\mathrm{S}A_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2}} = \underset{(\alpha+\beta=\gamma+1)}{\mathrm{S}A_{\alpha-1,\beta-1}k^{2\alpha}}.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (A), so erhält man die Relation

(I.) $A_{\alpha,\beta} = (4\alpha+1)A_{\alpha,\beta-1}+(4\beta+1)A_{\alpha-1,\beta}-(2\alpha+2\beta-2)(2\alpha+2\beta-1)A_{\alpha-1,\beta-1}, \quad (\alpha+\beta=\gamma+1)$

vermittelst welcher, da $A_{0,0}=1$ bekannt ist, sämmtliche Coefficienten $A_{\alpha,\beta}$ berechnet werden können. Uebrigens erhellt sofort, dass alle ganze Zahlen sind, und dass, wie auch schon die Gleichung $\mathrm{Al}\left(ku,\frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}(u)_1$ erfordert, allgemein $A_{\alpha,\beta}=A_{\beta,\alpha}$ ist. Man hat dann

(2.) $$\mathrm{Al}(u)_1 = \underset{(\alpha+\beta=\gamma)}{\mathrm{S}}\left\{(-1)^\gamma A_{\alpha,\beta}k^{2\alpha}\frac{u^{2\gamma+1}}{(2\gamma+1)'}\right\}.$$

$\mathrm{Al}(u)_2$ hat die Form

$$\mathrm{Al}(u)_2 = q = 1-B_1\frac{u^2}{2'}+B_2\frac{u^4}{4'}-\cdots+(-1)^n B_n\frac{u^{2n}}{(2n)'}+\cdots,$$

oder

$$q = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

wo $B_0=1$. Es ist dann

$$\frac{\partial^2 q}{\partial u^2} = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma\frac{u^{2\gamma-2}}{(2\gamma-2)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma B_{\gamma+1}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$u\frac{\partial q}{\partial u} = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma-1)'} = \mathrm{S}(-1)^\gamma 2\gamma B_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'}, \qquad \frac{\partial q}{\partial k} = \mathrm{S}(-1)^\gamma\frac{\partial B_\gamma}{\partial k}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$u^2 q = \mathrm{S}(-1)^\gamma B_\gamma\frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma)'} = -\mathrm{S}(-1)^\gamma 2\gamma(2\gamma-1)B_{\gamma-1}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

und aus (§ 2, (4.)) folgt die Recursions-Formel

$$B_{\gamma+1} = (1+4\gamma k^2)B_\gamma+2k(1-k^2)\frac{\partial B_\gamma}{\partial k}-(2\gamma-1)2\gamma k^2 B_{\gamma-1}. \qquad \text{(B)}$$

Weil $\mathrm{Al}\left(ku,\frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}(u)_3$ ist, so muss $\frac{(-1)^{\gamma+1}}{(2\gamma+2)'}k^{2\gamma+2}B_{\gamma+1}\left(\frac{1}{k}\right)$ der Coefficient von $u^{2\gamma+2}$ in der Entwicklung von $\mathrm{Al}(u)_3$ sein, und da dieser eine ganze Function von k^2 ist und überdies für $k=0$ verschwinden muss, weil $\mathrm{dn}\,u=1$ wird für $k=0$, so folgt, dass $B_{\gamma+1}$ von nicht höherem als dem $(2\gamma)^{\text{ten}}$ Grade sein,

und man daher setzen kann

$$B_{\gamma+1} = B_{0,\gamma} + B_{1,\gamma-1}k^2 + \cdots + B_{\gamma,0}k^{2\gamma} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha}.$$

Dann ist ferner, $\gamma > 1$ vorausgesetzt,

$$B_\gamma = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma-1)} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} B_{\alpha,\beta-1}k^{2\alpha}, \qquad k^2 B_\gamma = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma-1)} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} B_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha},$$

$$k\frac{\partial B_\gamma}{\partial k} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma-1)} 2\alpha B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} 2\alpha B_{\alpha,\beta-1}k^{2\alpha}, \quad k^3\frac{\partial B_\gamma}{\partial k} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma-1)} 2\alpha B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} (2\alpha-2) B_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha},$$

$$k^2 B_{\gamma-1} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma-2)} B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} B_{\alpha-1,\beta-1}k^{2\alpha}.$$

Daraus ergiebt sich die Relation

(II.) $$B_{\alpha,\beta} = (4\alpha+1)B_{\alpha,\beta-1} + (4\beta+4)B_{\alpha-1,\beta} - (2\alpha+2\beta-1)(2\alpha+2\beta)B_{\alpha-1,\beta-1}.$$

Es darf hier $\alpha+\beta = \gamma$ nicht kleiner als 2 genommen werden; man erhält aber aus (B) $B_1 = 1$, $B_2 = 1+2k^2$, also $B_{0,0} = 1$, $B_{0,1} = 1$, $B_{1,0} = 2$, und somit können sämmtliche Coefficienten $B_{\alpha,\beta}$ berechnet werden, und man hat dann

(3.) $$\mathrm{Al}(u)_2 = 1 - \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} \left\{ (-1)^\gamma B_{\alpha,\beta}k^{2\alpha} \frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma+2)'} \right\}.$$

Hieraus folgt sofort, weil $\mathrm{Al}(u)_3 = \mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right)_2$ ist,

(4.) $$\mathrm{Al}(u)_3 = 1 - \mathrm{S}_{(\alpha+\beta=\gamma)} \left\{ (-1)^\gamma B_{\alpha,\beta}k^{2\beta+2} \frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma+2)'} \right\}.$$

Die Reihe für $\mathrm{Al}(u)$ endlich hat die Form

$$\mathrm{Al}(u) = s = 1 - C_2\frac{u^4}{4'} + C_3\frac{u^6}{6'} - \cdots + (-1)^{n-1}C_n\frac{u^{2n}}{(2n)'} + \cdots,$$

oder

$$s = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

wo dann $C_0 = -1$, $C_1 = 0$ zu nehmen ist. Es ist

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma-2}}{(2\gamma-2)'} = -\mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_{\gamma+1}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$u\frac{\partial s}{\partial u} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma-1)'} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}2\gamma C_\gamma\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

$$\frac{\partial s}{\partial k} = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}\frac{\partial C_\gamma}{\partial k}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'}, \quad u^2 s = \mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}C_\gamma\frac{u^{2\gamma+2}}{(2\gamma)'} = -\mathrm{S}(-1)^{\gamma-1}(2\gamma-1)2\gamma C_{\gamma-1}\frac{u^{2\gamma}}{(2\gamma)'},$$

und daher (§ 2, (2.))

$$C_{\gamma+1} = 4\gamma k^2 C_\gamma + 2k(1-k^2)\frac{\partial C_\gamma}{\partial k} - (2\gamma-1)2\gamma k^2 C_{\gamma-1}. \qquad \text{(C)}$$

Weil $\mathrm{Al}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(u)$ ist, so muss $k^{2\gamma}C_\gamma\left(\frac{1}{k}\right) = C_\gamma$ sein, und da zugleich C_γ verschwinden muss für $k = 0$ (sobald $\gamma > 0$), so kann C_γ von nicht höherem als dem $(2\gamma-2)^{\text{ten}}$ Grade sein, und man kann daher

$$C_{\gamma+1} = C_{0,\gamma-1}k^2 + C_{1,\gamma-2}k^4 + \cdots + C_{\gamma-1,0}k^{2\gamma} = \mathrm{S}C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} \quad (\alpha+\beta=\gamma-1)$$

setzen, welche Form auch für $\gamma = 0$ noch gilt, weil $C_{0,-1} = 0$ zu setzen ist, und man dann, wie erforderlich, $C_1 = 0$ erhält. Dann ist, $\gamma > 1$ vorausgesetzt,

$$k^2 C_\gamma = \mathrm{S}C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+4} = \mathrm{S}C_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha+2},$$
$$(\alpha+\beta=\gamma-2) \qquad (\alpha+\beta=\gamma-1)$$

$$k\frac{\partial C_\gamma}{\partial k} = \mathrm{S}(2\alpha+2)C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2} = \mathrm{S}(2\alpha+2)C_{\alpha,\beta-1}k^{2\alpha+2},$$
$$(\alpha+\beta=\gamma-2) \qquad (\alpha+\beta=\gamma-1)$$

$$k^3\frac{\partial C_\gamma}{\partial k} = \mathrm{S}(2\alpha+2)C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+4} = \mathrm{S}\,2\alpha\, C_{\alpha-1,\beta}k^{2\alpha+2},$$
$$(\alpha+\beta=\gamma-2) \qquad (\alpha+\beta=\gamma-1)$$

$$k^2 C_{\gamma-1} = \mathrm{S}C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+4} = \mathrm{S}C_{\alpha-1,\beta-1}k^{2\alpha+2}.$$
$$(\alpha+\beta=\gamma-3) \qquad (\alpha+\beta=\gamma-1)$$

Diese Ausdrücke sind in (C) zu substituiren, und so findet sich

$$\text{(III.)} \quad C_{\alpha,\beta} = (4\alpha+4)C_{\alpha,\beta-1} + (4\beta+4)C_{\alpha-1,\beta} - (2\alpha+2\beta+1)(2\alpha+2\beta+2)C_{\alpha-1,\beta-1}.$$

In gegenwärtigem Falle muss $\alpha+\beta = \gamma-1 > 0$ sein; man erhält aber aus (C) $C_2 = 2k^2$, also $C_{0,0} = 2$, und so können vermittelst (III.) sämmtliche Coefficienten gefunden werden, wo sich dann wieder $C_{\alpha,\beta} = C_{\beta,\alpha}$ ergiebt; es ist dann

$$\text{(5.)} \quad \mathrm{Al}(u) = 1 - \mathrm{S}\left\{(-1)^\gamma C_{\alpha,\beta}k^{2\alpha+2}\frac{u^{2\gamma+4}}{(2\gamma+4)'}\right\}.$$
$$(\alpha+\beta=\gamma)$$

Mittelst der Formeln (I, II, III) sind die nachstehenden Ausdrücke der 10 ersten Coefficienten in den Reihen für $\mathrm{Al}(u)_1$ u. s. w. berechnet.

$$\mathrm{Al}(u)_1 = u - A_1\frac{u^3}{3'} + A_2\frac{u^5}{5'} - \cdots + (-1)^n A_n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)'} + \cdots$$

$A_1 = 1 + k^2$

$A_2 = 1 + k^4 + 4k^2$

$A_3 = 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4)$

$A_4 = 1 + k^8 + 16(k^2 + k^6) - 6k^4$

$A_5 = 1 + k^{10} + 25(k^2 + k^8) - 494(k^4 + k^6)$

$A_6 = 1 + k^{12} + 36(k^2 + k^{10}) - 5781(k^4 + k^8) - 12184k^6$

$A_7 = 1 + k^{14} + 49(k^2 + k^{12}) - 55173(k^4 + k^{10}) - 179605(k^6 + k^8)$

$A_8 = 1 + k^{16} + 64(k^2 + k^{14}) - 502892(k^4 + k^{12}) - 2279488(k^6 + k^{10}) - 3547930k^8$

$A_9 = 1 + k^{18} + 81(k^2 + k^{16}) - 4537500(k^4 + k^{14}) - 27198588(k^6 + k^{12}) - 59331498(k^8 + k^{10})$

$A_{10} = 1 + k^{20} + 100(k^2 + k^{18}) - 40856715(k^4 + k^{16}) - 313180080(k^6 + k^{14}) - 909015270(k^8 + k^{12}) - 1278530856k^{10}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u)_2 = 1 - B_1\frac{u^2}{2'} + B_2\frac{u^4}{4'} - \cdots + (-1)^n B_n \frac{u^{2n}}{(2n)'} + \cdots$$

$B_1 = 1$

$B_2 = 1 + 2k^2$

$B_3 = 1 + 6k^2 + 8k^4$

$B_4 = 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6$

$B_5 = 1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8$

$B_6 = 1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10}$

$B_7 = 1 + 42k^2 + 19308k^4 + 51816k^6 + 45024k^8 + 16896k^{10} + 2048k^{12}$

$B_8 = 1 + 56k^2 + 169320k^4 + 628064k^6 + 757264k^8 + 370944k^{10} + 93184k^{12} + 8192k^{14}$

$B_9 = 1 + 72k^2 + 1515368k^4 + 7594592k^6 + 12998928k^8 + 9100288k^{10} + 2725888k^{12} + 491520k^{14} + 32768k^{16}$

$B_{10} = 1 + 90k^2 + 13623480k^4 + 89348080k^6 + 211064400k^8 + 219361824k^{10} + 100242944k^{12} + 18450432k^{14} + 2506752k^{16} + 131072k^{18}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u)_3 = 1 - B'_1\frac{u^2}{2'} + B'_2\frac{u^4}{4'} - \cdots + (-1)^n B'_n \frac{u^{2n}}{(2n)'} + \cdots$$

$B'_1 = k^2$

$B'_2 = 2k^2 + k^4$

$B'_3 = 8k^2 + 6k^4 + k^6$

$B'_4 = 32k^2 + 60k^4 + 12k^6 + k^8$

$B'_5 = 128k^2 + 448k^4 + 348k^6 + 20k^8 + k^{10}$

$B'_6 = 512k^2 + 2880k^4 + 4600k^6 + 2372k^8 + 30k^{10} + k^{12}$

$B'_7 = 2048k^2 + 16896k^4 + 45024k^6 + 51816k^8 + 19308k^{10} + 42k^{12} + k^{14}$

$B'_8 = 8192k^2 + 93184k^4 + 370944k^6 + 757264k^8 + 628064k^{10} + 169320k^{12} + 56k^{14} + k^{16}$

$$B'_9 = 32768k^2 + 491520k^4 + 2725888k^6 + 9100288k^8 + 12998928k^{10} + 7594592k^{12} + 1515368k^{14} + 72k^{16} + k^{18}$$

$$B'_{10} = 131072k^2 + 2506752k^4 + 18450432k^6 + 100242944k^8 + 219361824k^{10} + 211064400k^{12} + 89348080k^{14} + 13623480k^{16} + 90k^{18} + k^{20}$$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(u) = 1 - C_2\frac{u^4}{4'} + C_3\frac{u^6}{6'} - \cdots + (-1)^{n-1}C_n\frac{u^{2n}}{(2n)'} + \cdots$$

$$C_2 = 2k^2$$
$$C_3 = 8(k^2+k^6)$$
$$C_4 = 32(k^2+k^6) + 68k^4$$
$$C_5 = 128(k^2+k^8) + 480(k^4+k^6)$$
$$C_6 = 512(k^2+k^{10}) + 3008(k^4+k^8) + 5400k^6$$
$$C_7 = 2048(k^2+k^{12}) + 17408(k^4+k^{10}) + 49568(k^6+k^8)$$
$$C_8 = 8192(k^2+k^{14}) + 95232(k^4+k^{12}) + 395520(k^6+k^{10}) + 603376k^8$$
$$C_9 = 32768(k^2+k^{16}) + 499712(k^4+k^{14}) + 2853888(k^6+k^{12}) + 5668096(k^8+k^{10})$$
$$C_{10} = 131072(k^2+k^{18}) + 2539520(k^4+k^{16}) + 19097600(k^6+k^{14}) + 38153728(k^8+k^{12}) + 42090784k^{10}.$$

u. s. w.

§ 4.

Es mögen jetzt zunächst einige Formeln hergeleitet werden, welche für die weiteren Entwicklungen nöthig sind.

Aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{Al}(u)}{\partial u^2} = -k^2 \operatorname{sn} u^2 = \operatorname{dn} u^2 - 1$$

folgt

(1.) $$\mathrm{el}(u) = \int_0 \operatorname{dn} u^2 \cdot \partial u = u + \frac{1}{\mathrm{Al}(u)}\frac{\partial \mathrm{Al}(u)}{\partial u},$$

und hieraus

(2.) $$\mathrm{lm}(u) = \int_0 \mathrm{el}(u)\cdot\partial u = \tfrac{1}{2}u^2 + \log \mathrm{Al}(u).$$

Die Formel

$$\mathrm{lm}(u+v) + \mathrm{lm}(u-v) = 2\,\mathrm{lm}(u) + 2\,\mathrm{lm}(v) + \log(1 - k^2 \operatorname{sn} u^2 \operatorname{sn} v^2)$$

giebt dann

$$\log \mathrm{Al}(u+v) + \log \mathrm{Al}(u-v) = \log[\mathrm{Al}(u)^2 \mathrm{Al}(v)^2 - k^2 \mathrm{Al}(u)_1^2 \mathrm{Al}(v)_1^2],$$

oder

(3.) $$\mathrm{Al}(u+v)\mathrm{Al}(u-v) = \mathrm{Al}(u)^2 \mathrm{Al}(v)^2 - k^2 \mathrm{Al}(u)_1^2 \mathrm{Al}(v)_1^2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Formeln, welche Relationen zwischen den Modular-Functionen von $u+v$, $u-v$, u, v ausdrückten, so lassen sich eine Menge Relationen zwischen den Functionen $\mathrm{Al}(u)_1$, $\mathrm{Al}(u)_2$, $\mathrm{Al}(u)_3$, $\mathrm{Al}(u)$ herleiten, die ich aber übergehe, weil sie in keiner Beziehung zu dem Folgenden stehen. Es ist ferner

$$\mathrm{lm}(ui) = \mathrm{lm}'(u) - \tfrac{1}{2}u^2 + \log \mathrm{cn}'u,$$

oder

$$\log \mathrm{Al}(ui) - \tfrac{1}{2}u^2 = \log \mathrm{Al}'(u) + \log \mathrm{Al}'(u)_2 - \log \mathrm{Al}'(u)$$
$$\mathrm{Al}(ui) = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_2,$$

wenn man auch hier durch den beigefügten Accent andeutet, dass der Modul k mit dem conjugirten k' zu vertauschen ist. In Verbindung mit den Formeln

$$\mathrm{sn}(ui) = i\frac{\mathrm{sn}'u}{\mathrm{cn}'u}, \qquad \mathrm{cn}(ui) = \frac{1}{\mathrm{cn}'u}, \qquad \mathrm{dn}(ui) = \frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'u}$$

giebt diese Gleichung zusammengenommen

$$(4.) \qquad \begin{cases} \mathrm{Al}(ui)_1 = ie^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_1, & \mathrm{Al}(ui)_2 = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u), \\ \mathrm{Al}(ui)_3 = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_3, & \mathrm{Al}(ui) = e^{\frac{1}{2}uu}\,\mathrm{Al}'(u)_2. \end{cases}$$

Weiter hat man

$$\mathrm{lm}(u+K) = \mathrm{lm}(u) + \tfrac{1}{2}EK + Eu + \log \mathrm{dn}\,u - \log\sqrt{k'},$$
$$\mathrm{lm}(u+K) - \tfrac{1}{2}(u+K)^2 = \mathrm{lm}(u) - \tfrac{1}{2}u^2 + \log \mathrm{dn}\,u - (K-E)u - \tfrac{1}{2}K(K-E) - \log\sqrt{k'},$$
$$\log \mathrm{Al}(u+K) = \log \mathrm{Al}(u)_3 - (K-E)(u+\tfrac{1}{2}K) + \log\frac{1}{\sqrt{k'}}.$$

Setzt man

$$\tau = 1 - \frac{E}{K},$$

so ist

$$-(K-E)(u+\tfrac{1}{2}K) = -\tfrac{1}{2}\tau(u+K)^2 + \tfrac{1}{2}\tau u^2,$$

und man erhält aus der vorstehenden Gleichung

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\,\mathrm{Al}(u+K) = \frac{1}{\sqrt{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den folgenden

$$\mathrm{sn}(u+K) = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \qquad \mathrm{cn}(u+K) = -k'\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}, \qquad \mathrm{dn}(u+K) = \frac{k'}{\mathrm{dn}\,u},$$

so findet sich

$$(5.)\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K)_1 = \frac{1}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2, & e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K)_2 = -\sqrt{k'}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K)_3 = \sqrt{k'}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u), & e^{\frac{1}{2}\tau(u+K)^2}\mathrm{Al}(u+K) = \frac{1}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3. \end{cases}$$

Vertauscht man in der obigen Gleichung

$$\log\mathrm{Al}(u+K) = \log\mathrm{Al}(u)_3-(K-E)(u+\tfrac{1}{2}K)+\log\frac{1}{\sqrt{k'}}$$

k mit k', so ergiebt sich

$$\log\mathrm{Al}'(u+K') = \log\mathrm{Al}'(u)_3-(K'-E')(u+\tfrac{1}{2}K')+\log\frac{1}{\sqrt{k}},$$

oder vermöge (4.)

$$\log\mathrm{Al}(ui+K'i)_2-\tfrac{1}{2}(u+K')^2 = \log\mathrm{Al}(ui)_3-\tfrac{1}{2}u^2-(K'-E')(u+\tfrac{1}{2}K')+\log\frac{1}{\sqrt{k}},$$

oder, wenn $\frac{u}{i}$ für u gesetzt wird,

$$\log\mathrm{Al}(u+K'i)_2 = \log\mathrm{Al}(u)_3-E'i(u+\tfrac{1}{2}K'i)+\log\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Wird nun

$$\tau' = \frac{E'}{K'}$$

gesetzt, so folgt hieraus

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i)_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_3,$$

und mit Rücksicht auf die Formeln

$$\mathrm{sn}(u+K'i) = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}, \qquad \mathrm{cn}(u+K'i) = \frac{1}{ki}\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}, \qquad \mathrm{dn}(u+K'i) = \frac{1}{i}\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

zusammengenommen

$$(6.)\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i)_1 = \frac{i}{\sqrt{k}}e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u), & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i) = i\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i)_2 = \frac{1}{\sqrt{k}}e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_3, & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+K'i)^2}\mathrm{Al}(u+K'i)_3 = \sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_2. \end{cases}$$

Aus (5, 6) folgt sofort weiter

$$(7.)\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K)_1 = -e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1, & e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K)_2 = -e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K)_3 = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3, & e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u). \end{cases}$$

$$(8.)\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i)_1 = -e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_1, & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i)_2 = e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i)_3 = e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_3, & e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i) = -e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u). \end{cases}$$

Es werde jetzt

$$\omega_0 = 2\alpha K + 2\beta K'i, \qquad \rho_0 = 2\alpha(K-E) + 2\beta E'i, \qquad \tau_0 = \frac{\rho_0}{\omega_0}$$

gesetzt, unter α, β beliebige ganze (positive oder negative) Zahlen verstanden. Aus (7, 8) leitet man her

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2\alpha K)^2}\mathrm{Al}(u+2\alpha K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u),$$
$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2\beta K'i) = (-1)^\beta e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u).$$

Setzt man in der ersten Gleichung $u+2\beta K'i$ für u und benutzt dann die zweite, so erhält man

$$e^{\delta}\mathrm{Al}(u+\omega_0) = (-1)^\beta \mathrm{Al}(u),$$

wo

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau(u+2\alpha K+2\beta K'i)^2 - \tfrac{1}{2}\tau(u+2\beta K'i)^2 + \tfrac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2 - \tfrac{1}{2}\tau' u^2$$

ist. Zu einer Reduction dieses Ausdrucks gelangt man auf folgende Weise. Es sei

$$A = aK+bK'i, \qquad B = a(K-E)+bE'i, \qquad C = \frac{B}{A}$$
$$A' = a'K+b'K'i, \qquad B' = a'(K-E)+b'E'i, \qquad C' = \frac{B'}{A'}$$
$$A'' = A+A', \qquad B'' = B+B', \qquad C'' = C+C',$$

wo a, b, a', b' willkürliche Grössen bedeuten, so hat man

$$(9.) \qquad AB'-BA' = (ab'-ba')i(KE'+EK'-KK') = (ab'-ba')\frac{\pi}{2}i.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}C(u+A)^2 - \tfrac{1}{2}Cu^2 = B(u+\tfrac{1}{2}A),$$

und daher

$$C(u+A+A')^2 - \tfrac{1}{2}C(u+A')^2 + \tfrac{1}{2}C'(u+A')^2 - \tfrac{1}{2}C'u^2 = B(u+A'+\tfrac{1}{2}A) + B'(u+\tfrac{1}{2}A')$$
$$= (B+B')u + BA' + \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}A'B'.$$

Aber es ist — nach (9.) —

$$BA' + \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}A'B' = \tfrac{1}{2}BA' + \tfrac{1}{2}AB' + \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}A'B' - (ab'-ba')\frac{\pi}{4}i$$
$$= \tfrac{1}{2}(B+B')(A+A') - (ab'-ba')\frac{\pi}{4}i.$$

Daher

$$(10.)\quad \tfrac{1}{2}C(u+A+A')^2-\tfrac{1}{2}C(u+A')^2+\tfrac{1}{2}C'(u+A')^2-\tfrac{1}{2}C'u^2$$
$$=(B+B')(u+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}A')-(ab'-ba')\frac{\pi}{4}i=\tfrac{1}{2}C''(u+A'')^2-\tfrac{1}{2}C''u^2-(ab'-ba')\frac{\pi}{4}i.$$

Nimmt man nun hier $a=2\alpha$, $b=0$, $a'=0$, $b'=2\beta$, so giebt diese Gleichung

$$\delta=\tfrac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2-\tfrac{1}{2}\tau_0u^2-\alpha\beta\pi i,$$

und daher ist

$$e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)=(-1)^{(\alpha-1)\beta}e^{\frac{1}{2}\tau_0uu}\mathrm{Al}(u),$$

und hieraus ergiebt sich mittelst der Formeln

$$\mathrm{sn}(u+\omega_0)=(-1)^{\alpha}\mathrm{sn}\,u,\qquad \mathrm{cn}(u+\omega_0)=(-1)^{\alpha+\beta}\mathrm{cn}\,u,\qquad \mathrm{dn}(u+\omega_0)=(-1)^{\beta}\mathrm{dn}\,u$$

$$(11.)\quad\begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)_1=(-1)^{\alpha\beta+\alpha+\beta}e^{\frac{1}{2}\tau_0uu}\mathrm{Al}(u)_1,\\ e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)_2=(-1)^{\alpha(\beta+1)}e^{\frac{1}{2}\tau_0uu}\mathrm{Al}(u)_2,\\ e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)_3=(-1)^{\alpha\beta}e^{\frac{1}{2}\tau_0uu}\mathrm{Al}(u)_3,\\ e^{\frac{1}{2}\tau_0(u+\omega_0)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_0)=(-1)^{(\alpha+1)\beta}e^{\frac{1}{2}\tau_0uu}\mathrm{Al}(u). \end{cases}$$

Ferner werde

$$\omega_1=(2\alpha+1)K+2\beta K'i,\qquad \rho_1=(2\alpha+1)(K-E)+2\beta E'i,\qquad \tau_1=\frac{\rho_1}{\omega_1}$$

gesetzt. Aus (5.) in Verbindung mit (7.) folgt

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K)^2}\mathrm{Al}(u+(2\alpha+1)K)=\frac{1}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3,$$

und aus (8.)

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2\beta K'i)_3=e^{\frac{1}{2}\tau'uu}\mathrm{Al}(u)_3.$$

Setzt man in der ersten Gleichung $u+2\beta K'i$ für u und reducirt mittelst der zweiten, so findet sich

$$e^{\delta}\mathrm{Al}(u+\omega_1)=\frac{1}{\sqrt{k'}}\mathrm{Al}(u)_3,$$

wo

$$\delta=\tfrac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K+2\beta K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau(u+2\beta K'i)^2+\tfrac{1}{2}\tau'(u+2\beta K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau'u^2$$

ist, oder — nach (10.), wenn man $a=2\alpha+1$, $b=0$, $a'=0$, $b'=2\beta$ nimmt —

$$\delta=\tfrac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2-\tfrac{1}{2}\tau_1u^2-\beta(2\alpha+1)\frac{\pi}{2}i,$$

und daher

$$e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_1) = (-1)^{\alpha\beta}\frac{i^\beta}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\mathrm{Al}(u)_3.$$

Diese Gleichung führt in Verbindung mit den Formeln

$$\mathrm{sn}(u+\omega_1) = (-1)^\alpha\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{cn}(u+\omega_1) = (-1)^{\alpha+\beta+1}\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{dn}(u+\omega_1) = (-1)^\beta\frac{k'}{\mathrm{dn}\,u}$$

zu den folgenden

$$(12.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_1)_1 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{(-1)^\alpha i^\beta}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_1)_2 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{-\sqrt{k'}}{(-1)^\alpha i^\beta}e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_1)_3 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{\sqrt{k'}}{i^\beta}e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\mathrm{Al}(u), \\ e^{\frac{1}{2}\tau_1(u+\omega_1)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_1) = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{i^\beta}{\sqrt{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\mathrm{Al}(u)_3. \end{cases}$$

Weiter sei

$$\omega_2 = 2\alpha K+(2\beta+1)K'i,\qquad \rho_2 = 2\alpha(K-E)+(2\beta+1)E'i,\qquad \tau_2 = \frac{\rho_2}{\omega_2}.$$

In der Gleichung

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2\alpha K)^2}\mathrm{Al}(u+2\alpha K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)$$

werde $u+(2\beta+1)K'i$ für u gesetzt, und dann die aus (6.) und (8.) sich ergebende

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)^2}\mathrm{Al}(u+(2\beta+1)K'i) = (-1)^\beta i\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)$$

angewandt, so erhält man

$$e^\delta\mathrm{Al}(u+\omega_2) = (-1)^\beta i\sqrt{k}\,\mathrm{Al}(u)_1,$$

wo

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau(u+2\alpha K+(2\beta+1)K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau(u+(2\beta+1)K'i)^2+\tfrac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)-\tfrac{1}{2}\tau' uu,$$

oder — nach (10.), wenn $a = 2\alpha$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 2\beta+1$ gesetzt wird —

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2-\tfrac{1}{2}\tau_2 u^2-\alpha(2\beta+1)\frac{\pi}{2}i$$

ist. Mithin

$$e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_2) = (-1)^{(\alpha+1)\beta}\frac{i}{i^\alpha\sqrt{k}}e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\mathrm{Al}(u)_1.$$

Mit Hülfe der Formeln

$$\mathrm{sn}(u+\omega_2) = (-1)^{\alpha}\frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u}, \quad \mathrm{cn}(u+\omega_2) = \frac{(-1)^{\alpha+\beta}}{i}\frac{\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{sn}\,u}, \quad \mathrm{dn}(u+\omega_2) = \frac{(-1)^{\beta}}{i}\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

folgert man hieraus

$$(13.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_2)_1 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{(-1)^{\beta}i}{i^{\alpha}\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\mathrm{Al}(u), \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_2) = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{i^{\alpha+1}\sqrt{k}}{(-1)^{\beta}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_2)_3 = (-1)^{\alpha\beta}\,i^{\alpha}\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\mathrm{Al}(u)_2, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_2)_2 = (-1)^{\alpha\beta}\,\dfrac{1}{i^{\alpha}\sqrt{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\mathrm{Al}(u)_3. \end{cases}$$

Endlich sei

$$\omega_3 = (2\alpha+1)K+(2\beta+1)K'i, \qquad \rho_3 = (2\alpha+1)(K-E)+(2\beta+1)E'i, \qquad \tau_3 = \frac{\rho_3}{\omega_3}.$$

In der Gleichung

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K)^2}\mathrm{Al}(u+(2\alpha+1)K) = \frac{1}{\sqrt{k}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3$$

werde $u+(2\beta+1)K'i$ für u gesetzt, so erhält man vermittelst der aus (6.) und (8.) folgenden

$$e^{\frac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)^2}\mathrm{Al}(u+(2\beta+1)K'i)_3 = \sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\mathrm{Al}(u)_2$$

$$e^{\delta}\mathrm{Al}(u+\omega_3) = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\mathrm{Al}(u)_2,$$

wo

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau(u+(2\alpha+1)K+(2\beta+1)K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau(u+(2\beta+1)K'i)^2+\tfrac{1}{2}\tau'(u+(2\beta+1)K'i)^2-\tfrac{1}{2}\tau' u^2,$$

oder — nach (10.), wenn $a = 2\alpha+1$, $a' = 0$, $b' = 2\beta+1$ genommen wird —

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2-\tfrac{1}{2}\tau_3 u^2-\tfrac{1}{4}(2\alpha+1)(2\beta+1)\pi i = \tfrac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2-\tfrac{1}{2}\tau_3 u^2-\alpha\beta\pi i+(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}i-\frac{\pi}{4}i$$

ist. Also, da $e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{i}$,

$$e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3) = (-1)^{\alpha\beta}i^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{ki}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_3 uu}\mathrm{Al}(u)_2.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den folgenden

$$\mathrm{sn}(u+\omega_3) = (-1)^{\alpha}\frac{\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{cn}(u+\omega_3) = (-1)^{\alpha+\beta}\frac{k'}{ki}\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{dn}(u+\omega_3) = (-1)^{\beta}k'i\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u},$$

so erhält man

$$(14.)\quad \begin{cases} e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_3)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3)_1 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{i^{\beta-\alpha}\sqrt{\frac{ki}{k'}}}{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau_3 uu}\mathrm{Al}(u)_3, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_2)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3)_3 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{-k}{i^{\beta-\alpha}\sqrt{\frac{ki}{k'}}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\mathrm{Al}(u)_1, \\ e^{\frac{1}{2}\tau_3(u+\omega_2)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3)_2 = (-1)^{\alpha\beta}\dfrac{k}{i^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{ki}{k'}}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_2 uu}\mathrm{Al}(u), \\ e^{\frac{1}{2}\tau_2(u+\omega_3)^2}\mathrm{Al}(u+\omega_3) = (-1)^{\alpha\beta}\,i^{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{ki}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau_1 uu}\mathrm{Al}(u)_2. \end{cases}$$

§ 5.

Nach den Formeln (11.) des vorigen § bleiben die Functionen $e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_1$, $e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_2$ u. s. w. ungeändert, oder ändern nur ihr Zeichen, wenn $u+\omega_0$ für u gesetzt wird. Diese Eigenschaft hat zur Folge, dass sie in Reihen entwickelt werden können, die nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen von $\frac{\pi}{\omega_0}u$ fortschreiten, und die gleichfalls für jeden reellen und imaginären Werth von u und k convergiren. Diese Reihen lassen sich einfach mit Hülfe der im vorhergehenden § entwickelten Relationen herleiten, jedoch vollkommen strenge nur unter der Bedingung, dass ihre Convergenz für jeden Werth von u und k zuvor nachgewiesen sei.

Wenn $F(x)$ eine Function ist, die für jeden Werth von x zwischen den reellen Grenzen a, b endlich und continuirlich bleibt, so giebt bekanntlich die unendliche Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos gx + A_2\cos 2gx + \cdots + A_r\cos rgx + \cdots + B_1\sin gx + B_2\sin 2gx + \cdots + B_r\sin rgx + \cdots,$$

wo $g = \frac{2\pi}{b-a}$, und allgemein

$$A_r = \frac{g}{\pi}\int_a^b F(x)\cos rgx\,.\,\partial x, \qquad B_r = \frac{g}{\pi}\int_a^b F(x)\sin rgx\,.\,\partial x$$

ist, den Werth von $F(x)$ für jeden zwischen a, b enthaltenen Werth von x. Für $x = a$, und $x = b$ ist die Summe der Reihe $= \frac{1}{2}[F(a)+F(b)]$. Da ferner die Reihe ungeändert bleibt, wenn $x+b-a$ für x gesetzt wird, so folgt, dass $F(x)$, wofern diese Function von $x = -\infty$ bis $x = \infty$ continuirlich bleibt und ihren Werth nicht ändert, wenn x in $x+b-a$ übergeht, für jeden reellen Werth von x durch dieselbe dargestellt ist. Es fragt sich nun, wenn eine Function so definirt ist, dass ihr auch für imaginäre Werthe des Arguments bestimmte Werthe zukommen, ob sie auch für diese durch eine convergente Reihe von der angegebenen Form dargestellt werden könne. Für Functionen von der Beschaffenheit wie die hier betrachteten $e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_1$ u. s. w. ist die Beantwortung dieser Frage in folgendem Satze enthalten.

Wenn $F(x)$ eine Function ist, die nach ganzen Potenzen von x in eine beständig convergirende Reihe (mit reellen oder imaginären Coefficienten) entwickelt werden kann, und ungeändert bleibt, wenn x in $x+a$ übergeht, wo a reell oder imaginär sein kann, so ist die Reihe

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{2\pi}{a}x + A_2\cos\frac{4\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots\\ &+ B_1\sin\frac{2\pi}{a}x + B_2\sin\frac{4\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots,\end{aligned}$$

worin allgemein

$$A_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x\,.\,\partial x, \qquad B_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x\,.\,\partial x,$$

für jeden reellen oder imaginären Werth von x convergent, und ihre Summe gleich $F(x)$. Ist aber

$$F(x+a) = -F(x),$$

so erhält man $F(x)$ durch eine convergente Reihe von der Form

$$\begin{aligned}&A_0\cos\frac{\pi}{a}x + A_1\cos\frac{3\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots\\ &+ B_0\sin\frac{\pi}{a}x + B_1\sin\frac{3\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots\end{aligned}$$

dargestellt, wo

$$A_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x\,.\,\partial x, \qquad B_r = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x\,.\,\partial x$$

ist.

Es werde zuerst angenommen, dass alle Coefficienten der Reihe, worin $F(x)$ entwickelt werden kann, reell seien, und man

$$F(x) = F(x+2\pi)$$

habe. Setzt man $x = u+vi$, unter u, v reelle Veränderliche verstanden, so geht $F(x)$ in eine Function von u und v über, und man hat

$$F(x) = F(u+vi) = \varphi + i\psi,$$

wo φ, ψ reelle und, so wie ihre Differentialquotienten aller Ordnungen, beständig endliche und continuirliche Functionen von u, v sind. Wird $u+2\pi$ für u gesetzt, so ist

$$\varphi(u+2\pi, v) + i\psi(u+2\pi, v) = \varphi(u,v) + i\psi(u,v),$$

d. h.

$$\varphi(u+2\pi, v) = \varphi(u,v), \qquad \psi(u+2\pi, v) = \psi(u,v).$$

Vermöge dieser Eigenschaften von φ, ψ erhält man nach dem vorhin angeführten Satze, wenn man sie blos als Functionen von u betrachtet, und

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi . \cos ru . \partial u, \qquad a'_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi . \sin ru . \partial u,$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi . \cos ru . \partial u, \qquad b'_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi . \sin ru . \partial u$$

setzt,

$$\begin{aligned} \varphi &= \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos u + \cdots + a_r \cos ru + \cdots \\ &\quad + a'_1 \sin u + \cdots + a'_r \sin ru + \cdots, \\ \psi &= \tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos u + \cdots + b_r \cos ru + \cdots \\ &\quad + b'_1 \sin u + \cdots + b'_r \sin ru + \cdots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F(u+vi) &= \tfrac{1}{2}(a_0+b_0 i) + (a_1+b_1 i)\cos u + \cdots + (a_r+b_r i)\cos ru + \cdots \\ &\quad + (a'_1+b'_1 i)\sin u + \cdots + (a'_r+b'_r i)\sin ru + \cdots \end{aligned}$$

Hier sind nun die Coefficienten a_r, b_r, a'_r, b'_r Functionen von v; soll aber der zu beweisende Satz richtig sein, so muss sich die vorstehende Reihe auf die Form

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos(u+vi) + \cdots + A_r \cos r(u+vi) + \cdots \\ &\quad + B_1 \sin(u+vi) + \cdots + B_r \sin r(u+vi) + \cdots \end{aligned}$$

bringen lassen, in der Art, dass A_r, B_r von u und v unabhängig sind. Die Vergleichung beider Formen giebt

$$\begin{aligned} a_r + b_r i &= A_r \mathfrak{Cos} rv + iB_r \mathfrak{Sin} rv \\ a'_r + b'_r i &= B_r \mathfrak{Cos} rv - iA_r \mathfrak{Sin} rv, \end{aligned}$$

oder

$$A_r = (a_r + b_r i)\,\mathfrak{Cos}\, rv - i(a'_r + b'_r i)\,\mathfrak{Sin}\, rv$$
$$B_r = (a'_r + b'_r i)\,\mathfrak{Cos}\, rv + i(a_r + b_r i)\,\mathfrak{Sin}\, rv,$$

oder, wenn man für a_r, a'_r, b_r, b'_r ihre Werthe setzt,

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi + \psi i)\cos r(u+vi).\partial u = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u+vi)\cos r(u+vi).\partial u,$$
$$B_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi + \psi i)\sin r(u+vi).\partial u = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u+vi)\sin r(u+vi).\partial u.$$

Es haben aber die Functionen $F(x)\cos rx$, $F(x)\sin rx$ ganz dieselbe Beschaffenheit wie $F(x)$, so dass auch, wenn man

$$F(x)\cos rx = F(u+vi)\cos r(u+vi) = P + Qi,$$
$$F(x)\sin rx = F(u+vi)\sin r(u+vi) = P' + Q'i$$

setzt, P, Q, P', Q' reelle Functionen von derselben Beschaffenheit wie φ, ψ sind und namentlich

$$P(u+2\pi, v) = P(u,v), \qquad Q(u+2\pi, v) = Q(u,v),$$
$$P'(u+2\pi, v) = P'(u,v), \qquad Q'(u+2\pi, v) = Q'(u,v)$$

ist. Differentiirt man die beiden vorhergehenden Gleichungen nach u und v, so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial u} = -\frac{\partial Q}{\partial v}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial v}, \qquad \frac{\partial P'}{\partial u} = -\frac{\partial Q'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial Q'}{\partial u} = \frac{\partial P'}{\partial v},$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P\,\partial u = \int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial v}\partial u = \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q}{\partial u}\partial u = Q(2\pi, v) - Q(0, v),$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q\,\partial u = \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q}{\partial v}\partial u = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial u}\partial u = P(0, v) - P(2\pi, v),$$

und ebenso

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P'\partial u = Q'(2\pi, v) - Q'(0, v), \qquad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q'\partial u = P'(0, v) - P'(2\pi, v).$$

Aber nach den oben angegebenen Gleichungen ist

$$P(2\pi, v) = P(0, v), \qquad Q(2\pi, v) = Q(0, v), \qquad P'(2\pi, v) = P'(0, v), \qquad Q'(2\pi, v) = Q'(0, v),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P\,\partial u = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q\,\partial u = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} P'\partial u = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\int_0^{2\pi} Q'\partial u = 0.$$

Es sind also in der That

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P+Qi)\,\partial u, \qquad B_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P'+Q'i)\,\partial u$$

von v unabhängig, und man kann daher bei Bestimmung dieser Grössen $v = 0$ setzen, wo man dann

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u)\cos ru\,.\,\partial u, \qquad B_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(u)\sin ru\,.\,\partial u$$

erhält. Die Reihe

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos x + \cdots + A_r\cos rx + \cdots\\ &\quad + B_1\sin x + \cdots + B_r\sin rx + \cdots,\end{aligned}$$

deren Coefficienten so bestimmt sind, dass für alle reellen Werthe von x ihre Summe gleich $F(x)$ ist, geht also, wenn $x = u + vi$ gesetzt wird, in die oben für $F(u+vi)$ gefundene und für alle reellen Werthe von u und v convergirende über, und sie giebt daher den Werth von $F(x)$ für jedes beliebige x.

Der allgemeinere Fall, wo $F(x) = F(x+a)$ ist, und a einen beliebigen reellen oder imaginären Werth hat, auch die Coefficienten der Reihe für $F(x)$ beliebige Werthe haben können, wird leicht auf den hier betrachteten zurückgeführt. Setzt man nämlich $x = \frac{a}{2\pi}y$, so geht $F(x)$ in eine Function von y über, und man kann $F(x) = \varphi(y) + i\psi(y)$ setzen, in der Art, dass die Reihen-Entwicklungen von φ, ψ nach Potenzen von y nur reelle Coefficienten haben. Setzt man $x+a$ für x, so geht y in $y+2\pi$ über, und man hat

$$\varphi(y+2\pi) + i\psi(y+2\pi) = \varphi(y) + i\psi(y), \quad \text{d. h.} \quad \varphi(y+2\pi) = \varphi(y), \quad \psi(y+2\pi) = \psi(y),$$

also nach dem eben Bewiesenen für jeden Werth von y

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos y + \cdots + a_r\cos ry + \cdots\\ &\quad + a_1'\sin y + \cdots + a_r'\sin ry + \cdots,\\ \psi(y) &= \tfrac{1}{2}b_0 + b_1\cos y + \cdots + b_r\cos ry + \cdots\\ &\quad + b_1'\sin y + \cdots + b_r'\sin ry + \cdots,\end{aligned}$$

wo

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(y)\cos ry\,.\,\partial y, \qquad a'_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(y)\sin ry\,.\,\partial y,$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(y)\cos ry\,.\,\partial y, \qquad b'_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(y)\sin ry\,.\,\partial y$$

ist. Dann ist aber

$$a_r + b_r i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{a}{2\pi}y\right)\cos ry\,.\,\partial y = \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x\,.\,\partial x,$$

$$a'_r + b'_r i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F\left(\frac{a}{2\pi}y\right)\sin ry\,.\,\partial y = \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x\,.\,\partial x.$$

Mithin hat man

$$F(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B_1\sin\frac{2\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$

für jeden reellen und imaginären Werth von x, wenn

$$A_r = \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x\,.\,\partial x, \qquad B_r = \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\sin\frac{2ra}{a}x\,.\,\partial x$$

gesetzt wird. Wenn man aber zweitens

$$F(x) = -F(x+a)$$

hat, so ist $F(x+2a) = F(x)$, und es kann daher $F(x)$ in eine Reihe entwickelt werden, deren Glieder die Form

$$A\cos\frac{2r\pi}{2a}x, \qquad B\sin\frac{2r\pi}{2a}x$$

haben. Wegen der Gleichung $F(x+a) = -F(x)$ muss aber jedes Glied sein Zeichen ändern, wenn $x+a$ für x gesetzt wird, und es können daher nur ungrade Werthe von r vorkommen. Somit hat man in diesem Falle

$$F(x) = A_0\cos\frac{\pi}{a}x + A_1\cos\frac{3\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B_0\sin\frac{\pi}{a}x + B_1\sin\frac{3\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x + \cdots,$$

$$A_r = \frac{1}{a}\int_0^{2a} F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x\,.\,\partial x$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{a} F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x\,.\,\partial x + \frac{1}{a}\int_0^{a} F(x+a)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}(x+a)\,.\,\partial x$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\cos\frac{(2r+1)\pi}{a}x\,.\,\partial x$$

$$B_r = \frac{1}{a}\int_0^{2a} F(x)\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x\,.\,\partial x = \frac{2}{a}\int_0^{a} F(x)\sin\frac{(2r+1)\pi}{a}x\,.\,\partial x.$$

Uebrigens lässt sich auf die bekannte Weise zeigen, dass $F(x)$ nur auf eine einzige Art in eine Reihe von der angegebenen Form entwickelt werden kann.

Es ist angenommen worden, dass sich $F(x)$ nach ganzen Potenzen von x in eine beständig convergirende Reihe entwickeln lasse. Diese Bedingung ist nothwendig, indem sich leicht zeigen lässt, dass eine nach den sinus und cosinus der Vielfachen von $\frac{2\pi}{a}x$ fortschreitende Reihe, wenn sie für jeden Werth von x convergirt, immer in eine Reihe der angegebenen Art umgeformt werden kann, worauf ich jedoch hier nicht näher eingehe. Ich bemerke nur noch, dass auch die Reihe, welche man erhält, wenn man jedes einzelne Glied der Reihe

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots + A_r\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B_1\sin\frac{2\pi}{a}x + \cdots + B_r\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$

$n$mal differentiirt, convergent und ihre Summe gleich $\frac{\partial^n F(x)}{\partial x^n}$ ist, was im Allgemeinen bei Reihen dieser Art nicht der Fall ist. Setzt man $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = F'(x)$, so folgt aus $F(x+a) = F(x)$

$$F'(x+a) = F'(x).$$

Es ist also $F'(x)$ eine Function ganz von derselben Beschaffenheit wie $F(x)$, und man hat daher

$$F'(x) = \tfrac{1}{2}A_0' + A_1'\cos\frac{2\pi}{a}x + \cdots + A_r'\cos\frac{2r\pi}{a}x + \cdots$$
$$+ B_1'\sin\frac{2\pi}{a}x + \cdots + B_r'\sin\frac{2r\pi}{a}x + \cdots,$$

wo

$$A_r' = \frac{2}{a}\int_0^{a} F'(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x\,.\,\partial x, \qquad B_r' = \frac{2}{a}\int_0^{a} F'(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x\,.\,\partial x$$

ist. Hier hat man nun zunächst

$$A_0' = \frac{2}{a}\int_0^a F'(x).\partial x = \frac{2}{a}[F(a)-F(0)] = 0;$$

ferner

$$A_r' = \frac{2}{a}[F(a)-F(0)]+\frac{2r\pi}{a}\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{2r\pi}{a}x.\partial x = \frac{2r\pi}{a}B_r,$$

$$B_r' = -\frac{2r\pi}{a}\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{2r\pi}{a}x.\partial x = -\frac{2r\pi}{a}A_r;$$

also

$$F'(x) = -\frac{2\pi}{a}A_1\sin\frac{2\pi}{a}x-\cdots-\frac{2r\pi}{a}A_r\sin\frac{2r\pi}{a}x-\cdots$$
$$+\frac{2\pi}{a}B_1\cos\frac{2\pi}{a}x+\cdots+\frac{2r\pi}{a}B_r\cos\frac{2r\pi}{a}x+\cdots,$$

genau dieselbe Reihe, welche man erhält, wenn man die Reihe für $F(x)$ differentiirt; aber man sieht zugleich, dass dies nur darum zutrifft, weil $F(a) = F(0)$ ist. Hieraus lässt sich nun sofort weiter schliessen, dass man allgemein $\frac{\partial^n F(x)}{\partial x^n}$ in einer convergirenden Reihe erhält, wenn man von jedem einzelnen Gliede der Reihe für $F(x)$ die n^{te} Ableitung nimmt. — Ein Gleiches gilt für den Fall, wo man $F(x+a) = -F(x)$ hat.

§ 6.

Nach dem so eben bewiesenen Satze können also die Functionen

$$e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_1, \qquad e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_2, \qquad e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)_3, \qquad e^{\frac{1}{2}\tau_0 uu}\mathrm{Al}(u)$$

durch convergirende Reihen, deren einzelne Glieder die Form

$$A\cos r\frac{\pi}{\omega_0}u, \qquad B\sin r\frac{\pi}{\omega_0}u$$

haben, dargestellt werden, und man kann auf diese Weise unendlich viele Entwicklungen der Hülfs-Functionen erhalten. Es mögen jedoch hier nur zwei davon ausführlicher behandelt werden, diejenigen nämlich, welche sich ergeben, wenn $\omega_0 = 2K$, und wenn $\omega_0 = 2K'i$ genommen wird, welche, wenn k reell und kleiner als 1 ist, allein in reeller Form erscheinen. Zur Ausführung derselben bieten sich nun zwei Wege dar. Da nach dem vorigen § die Form der Reihen bekannt ist und auch ihre Convergenz für jeden reellen

und imaginären Werth von u und k feststeht, so kann man ein ganz ähnliches Verfahren befolgen, wie Herr Jacobi in den »Fundamentis« bei den Reihen-Entwicklungen der Functionen $H(u)$, $\Theta(u)$ aus den unendlichen Producten, wodurch sie ursprünglich dargestellt sind, und man reicht dann mit den in § 4 entwickelten Formeln aus. Man kann aber auch von einer Transformation der in § 2 entwickelten partiellen Differential-Gleichungen ausgehen, und so auf einem ganz verschiedenen Wege zu denselben Resultaten gelangen. Man hat (§ 4, (7.))

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K)^2}\mathrm{Al}(u+2K) = e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u),$$

und man kann daher $e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)$, wenn man zugleich berücksichtigt, dass diese Function grade ist, in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$A_0 + 2A_1\cos 2\eta u + 2A_2\cos 4\eta u + \cdots + 2A_r\cos 2r\eta u + \cdots,$$

oder wenn man

$$z = e^{\eta ui}$$

setzt,

$$A_0 + A_1(z^2+z^{-2}) + A_2(z^4+z^{-4}) + \cdots + A_r(z^{2r}+z^{-2r}) + \cdots$$

entwickeln, wo $\eta = \frac{\pi}{2K}$ ist. Diese Reihe möge durch $\mathrm{F}(z)$ bezeichnet werden, so dass man

$$e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) = \mathrm{F}(z) \tag{1.}$$

hat.

Man bezeichne ferner $\frac{K'}{K}\pi$ durch ϑ und $e^{-\vartheta}$ durch h.

Setzt man nun in (1.) $u+2K'i$ für u, so geht ηui in $\eta ui-\vartheta$, also z in hz über, und es ist

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+2K'i)^2}\mathrm{Al}(u+2K'i) = \mathrm{F}(hz).$$

Aber — nach § 4, (8.) —

$$\mathrm{Al}(u+2K'i) = -e^{-2E'(u+K'i)i}\mathrm{Al}(u),$$

und daher, wenn man bemerkt, dass

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tau(u+2K'i)^2 - 2E'(u+K'i)i &= \tfrac{1}{2}\tau u^2 + 2\frac{(K-E)K'-KE'}{K}ui - 2\frac{(K-E)K'-KE'}{K}K \\ &= \tfrac{1}{2}\tau u^2 - \frac{2\pi}{2K}ui + \frac{K'}{K}\pi = \tfrac{1}{2}\tau u^2 - 2\eta ui + \vartheta\end{aligned}$$

ist,

$$e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u) = -hz^2\,\mathrm{F}(hz),$$

d. h.

$$\mathrm{F}(z) = -hz^2\,\mathrm{F}(hz). \tag{2.}$$

Setzt man $u+K'i$ für u in (1.), so geht ηui in $\eta ui-\frac{1}{2}\vartheta$, z in $h^{\frac{1}{2}}z$ über, und man hat

$$e^{\frac{1}{2}\tau(u+K'i)^2}\,\mathrm{Al}(u+K'i) = \mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}z).$$

Es ist aber (§ 4, (6.))

$$\mathrm{Al}(u+K'i) = i\sqrt{k}\,e^{-E'(u+\frac{1}{2}K'i)i}\,\mathrm{Al}(u)_1,$$

und daher, weil jetzt

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tau(u+K'i)^2-E'(u+\tfrac{1}{2}K'i)i &= \tfrac{1}{2}\tau u^2+\frac{(K-E)K'-KE'}{K}ui-\tfrac{1}{2}\frac{(K-E)K'-KE'}{K}K'\\ &= \tfrac{1}{2}\tau u^2-\eta ui+\tfrac{1}{4}\vartheta\end{aligned}$$

ist,

$$\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_1 = \frac{1}{i}h^{\frac{1}{4}}z\,\mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}z). \tag{3.}$$

Setzt man in dieser Gleichung $u+K$ für u, so geht ηui in $\eta ui+\frac{\pi}{2}i$, z in zi über, und nach § 4, (5.) erhält man

$$\sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_2 = h^{\frac{1}{4}}z\,\mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}zi). \tag{4.}$$

Setzt man endlich auch in (2.) $u+K$ für u, zi für z, so erhält man (nach § 4, (5.))

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3 = \mathrm{F}(zi). \tag{5.}$$

Setzen wir nun

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{S}A_\alpha z^{2\alpha},$$

wo dem Index α alle ganzzahligen, positiven und negativen Werthe zu geben sind, so ist

$$hz^2\,\mathrm{F}(hz) = \mathrm{S}A_\alpha h^{2\alpha+1}z^{2\alpha+2} = \mathrm{S}A_{\alpha-1}h^{2\alpha-1}z^{2\alpha}.$$

Aber nach (2.) ist $\mathrm{F}(z) = -hz^2\,\mathrm{F}(hz)$; mithin muss

$$A_\alpha = -h^{2\alpha-1}A_{\alpha-1}$$

sein, woraus sich

$$A_\alpha = (-1)^\alpha h^{\alpha\alpha}A_0$$

ergiebt, so dass man

$$\mathrm{F}(z) = A_0(1-h(z^2+z^{-2})+h^4(z^4+z^{-4})-\cdots+(-1)^r h^{rr}(z^{2r}+z^{-2r})+\cdots)$$

erhält. Für $u=0$ wird aber $e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)=1$ und auch $z=1$, wonach sich

$$\frac{1}{A_0} = 1-2h+2h^4-\cdots+(-1)^r 2h^{rr}+\cdots$$

ergiebt, welcher Werth durch g bezeichnet werden soll. Man hat dann

$$g\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) = 1-h(z^2+z^{-2})+h^4(z^4+z^{-4})-\cdots+(-1)^r h^{rr}(z^{2r}+z^{-2r})+\cdots$$

Ferner ist nun

$$\frac{1}{i}h^{\frac{1}{4}}z\,\mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}z) = \frac{1}{i}\frac{1}{g}h^{\frac{1}{4}}z\,\mathrm{S}(-1)^\alpha h^{\alpha\alpha}h^\alpha z^{2\alpha} = \frac{1}{gi}\mathrm{S}(-1)^\alpha h^{\frac{(2\alpha+1)^2}{4}}z^{2\alpha+1},$$

$$h^{\frac{1}{4}}z\,\mathrm{F}(h^{\frac{1}{2}}zi) = \frac{1}{g}\mathrm{S}h^{\frac{(2\alpha+1)^2}{4}}z^{2\alpha+1},$$

und

$$\mathrm{F}(zi) = \frac{1}{g}\mathrm{S}h^{\alpha\alpha}z^{2\alpha}.$$

Hiernach erhält man, vermöge der Gleichungen (3, 4, 5), wenn zugleich für z wieder $e^{\eta ui}=\cos\eta u+i\sin\eta u$ gesetzt wird,

$$(6.)\quad \begin{cases} g\sqrt{k}\;e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1 = 2h^{\frac{1}{4}}\sin\eta u-2h^{\frac{9}{4}}\sin 3\eta u+2h^{\frac{25}{4}}\sin 5\eta u-\cdots+(-1)^r 2h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\sin(2r+1)\eta u+\cdots \\ g\sqrt{\frac{k}{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2 = 2h^{\frac{1}{4}}\cos\eta u+2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\eta u+2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\eta u+\cdots+2h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\cos(2r+1)\eta u+\cdots \\ g\sqrt{\frac{1}{k'}}e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3 = 1+2h\cos 2\eta u+2h^4\cos 4\eta u+2h^9\cos 6\eta u+\cdots+2h^{rr}\cos 2r\eta u+\cdots \\ g\,e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) = 1-2h\cos 2\eta u+2h^4\cos 4\eta u-2h^9\cos 6\eta u+\cdots+2(-1)^r h^{rr}\cos 2r\eta u+\cdots, \end{cases}$$

und hieraus

$$(7.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,u = \dfrac{2h^{\frac{1}{4}}\sin\eta u-2h^{\frac{9}{4}}\sin 3\eta u+2h^{\frac{25}{4}}\sin 5\eta u-\cdots}{1-2h\cos 2\eta u+2h^4\cos 4\eta u-2h^9\cos 6\eta u+\cdots} \\ \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\,\mathrm{cn}\,u = \dfrac{2h^{\frac{1}{4}}\cos\eta u+2h^{\frac{9}{4}}\cos 3\eta u+2h^{\frac{25}{4}}\cos 5\eta u+\cdots}{1-2h\cos 2\eta u+2h^4\cos 4\eta u-2h^9\cos 6\eta u+\cdots} \\ \sqrt{\dfrac{1}{k'}}\,\mathrm{dn}\,u = \dfrac{1+2h\cos 2\eta u+2h^4\cos 4\eta u+2h^9\cos 6\eta u+\cdots}{1-2h\cos 2\eta u+2h^4\cos 4\eta u-2h^9\cos 6\eta u+\cdots} \end{cases}$$

Dieses sind die zuerst von Herrn Jacobi gegebenen und aus den Trans-

formations-Formeln hergeleiteten Entwicklungen der Modular-Functionen. Hier beruht ihre Herleitung auf den in § 4 entwickelten Eigenschaften der Hülfs-Functionen, und man erhält zugleich die Ueberzeugung, dass sie für beliebige (reelle oder imaginäre) Werthe des Arguments wie des Moduls gelten; aber man sieht, dass die Herleitung auf dem hier eingeschlagenen Wege durchaus nicht strenge sein würde, wenn nicht vorher bewiesen wäre, dass die Reihen auch für imaginäre Werthe von u convergiren; denn die Bestimmung der Coefficienten wurde nur dadurch gewonnen, dass $u+2K'i$ für u gesetzt ward.

Setzt man in (6.) k' für k und ui für u, so erhält man vermittelst der Gleichungen (4.) des § 4 sofort, wenn man

$$\eta' = \frac{2\pi}{K'}, \qquad h' = e^{-\frac{K}{K'}\pi}, \qquad g' = 1-2h'+2h'^4-2h'^9+\cdots$$

setzt,

$$(8.)\begin{cases} g'\sqrt{k'}\; e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)_1 = 2h'^{\frac{1}{4}}\mathfrak{Sin}\eta' u-2h'^{\frac{9}{4}}\mathfrak{Sin}3\eta' u+\cdots+2(-1)^r h'^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\mathfrak{Sin}(2r+1)\eta' u+\cdots \\ g'\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)_2 = 1-2h'\mathfrak{Cos}2\eta' u+2h'^4\mathfrak{Cos}4\eta' u-\cdots+2(-1)^r h'^{r^2}\mathfrak{Cos}2r\eta' u+\cdots \\ g'\sqrt{\frac{1}{k}}\; e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)_3 = 1+2h'\mathfrak{Cos}2\eta' u+2h'^4\mathfrak{Cos}4\eta' u+\cdots+2h'^{r^2}\mathfrak{Cos}2r\eta' u+\cdots \\ g'\sqrt{\frac{k'}{k}}\,e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u) = 2h'^{\frac{1}{4}}\mathfrak{Cos}\eta' u+2h'^{\frac{9}{4}}\mathfrak{Cos}3\eta' u+\cdots+2h'^{\frac{(2r+1)^2}{4}}\mathfrak{Cos}(2r+1)\eta' u+\cdots \end{cases}$$

Dies ist die erwähnte zweite Art von Reihen für die Hülfs-Functionen, welche man auch auf eine ganz ähnliche Weise wie die unter (6.) aufgestellten hätte herleiten können.

Es soll jetzt noch gezeigt werden, wie man zu denselben Resultaten durch Transformation der in § 2 entwickelten Differential-Gleichungen gelangen kann.

§ 7.

Die Functionen

$$\sqrt{k}\,\mathrm{Al}(u)_1, \qquad \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\mathrm{Al}(u)_2, \qquad \sqrt{\frac{1}{k'}}\,\mathrm{Al}(u)_3, \qquad \mathrm{Al}(u)$$

genügen nach § 2 sämmtlich der partiellen Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+2k^2u\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi}{\partial k}+k^2u^2\varphi = 0. \qquad \text{(a)}$$

Setzen wir $\varphi = w\varphi_1$, wo dann

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = w\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \varphi_1\frac{\partial w}{\partial u}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial k} = w\frac{\partial\varphi_1}{\partial k} + \varphi_1\frac{\partial w}{\partial k}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = w\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} + 2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2},$$

so geht die vorstehende Gleichung über in

$$w\left[\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} + 2\left(k^2u + \frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial k}\right] + S\varphi_1 = 0,$$

wo

$$S = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial w}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial w}{\partial k} + k^2u^2w$$

ist. Für $w = e^{-\frac{1}{2}\tau uu}$, unter τ hier eine bloss von k abhängige Grösse verstanden, hat man

$$\frac{\partial w}{\partial u} = -\tau uw, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \tau^2u^2w - \tau w, \quad \frac{\partial w}{\partial k} = -\tfrac{1}{2}u^2\frac{\partial\tau}{\partial k}w,$$

also

$$S = w\left[-\tau + \left(\tau^2 - 2k^2\tau + k^2 - k(1-k^2)\frac{\partial\tau}{\partial k}\right)u^2\right].$$

Setzt man nun, unter a, b beliebige Constanten verstanden,

$$\omega = aK + bK'i, \qquad \rho = a(K-E) + bE'i,$$

so erhält man durch Verbindung der Gleichungen

$$k(1-k^2)\frac{\partial K}{\partial k} = E - (1-k^2)K, \qquad k(1-k^2)\frac{\partial K'}{\partial k} = k^2K' - E',$$

$$k\frac{\partial E}{\partial k} = E - K, \qquad k(1-k^2)\frac{\partial E'}{\partial k} = k^2(K'-E')$$

die folgenden:

$$k(1-k^2)\frac{\partial\omega}{\partial k} = k^2\omega - \rho, \qquad k(1-k^2)\frac{\partial\rho}{\partial k} = k^2(\omega-\rho), \tag{b}$$

und hieraus, wenn man

$$\tau = \frac{\rho}{\omega}$$

nimmt,

$$k(1-k^2)\frac{\partial\tau}{\partial k} = k^2(1-2\tau) + \tau^2. \tag{c}$$

Es ist daher $S = -\tau w$ und demnach

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} + 2(k^2-\tau)u\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_1}{\partial k} - \tau\varphi_1 = 0.$$

Setzt man nun

$$\eta_1 = \frac{\pi}{2\omega}, \qquad \eta u = t$$

und bezeichnet φ_1 als Function von t und k betrachtet durch φ_2, so ist

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u} = \eta_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u^2} = \eta_1^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial k} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial k} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial k} + u\frac{\partial\eta_1}{\partial k}\frac{\partial\varphi_2}{\partial t},$$

und daher

$$\eta_1^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + 2\left((k^2-\tau)\eta_1 + k(1-k^2)\frac{\partial\eta_1}{\partial k}\right)u\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial k} - \tau\varphi_2 = 0.$$

Aber es ist

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial k} = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial k},$$

oder — nach (b) —

$$k(1-k^2)\frac{\partial\eta_1}{\partial k} + \frac{\pi}{2}\frac{k^2\omega-\rho}{\omega^2} = 0,$$

d. h.

$$k(1-k^2)\frac{\partial\eta_1}{\partial k} + (k^2-\tau)\eta_1 = 0. \qquad \text{(d)}$$

Mithin

$$\eta_1^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi_2}{\partial k} - \tau\varphi_2 = 0.$$

Wird nun $\varphi_2 = A\psi$ gesetzt, unter A eine Function von k allein verstanden, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$A\left(\eta_1^2\frac{\partial^2\psi}{\partial k^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\psi}{\partial k}\right) + \left(2k(1-k^2)\frac{\partial A}{\partial k} - \tau A\right)\psi = 0,$$

und es kann nun A so bestimmt werden, dass

$$2k(1-k^2)\frac{\partial A}{\partial k} - \tau A = 0$$

wird.

Substituirt man hier für τ den Werth, der sich aus (d) ergiebt, so findet sich

$$2\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial k} = \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial k} + \frac{k}{1-k^2} = \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial k} - \frac{1}{k'}\frac{\partial k'}{\partial k},$$

und dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn

$$2\log A = \log\eta - \log k', \qquad A = \sqrt{\frac{\eta}{k'}}$$

genommen wird, und es ist alsdann

$$\eta^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\psi}{\partial k} = 0.$$

Setzt man nun ferner

$$\omega' i = a'K + b'K'i, \qquad \rho' i = a'(K-E) + b'E'i,$$

unter a', b' ebenfalls willkürliche Constanten verstanden, so erhält man

$$\omega\rho' i - \rho\omega' i = (ab'-ba')(E'K + K'E - KK')i = (ab'-ba')\frac{\pi}{2}i,$$

und daher, wenn man sich a', b' so bestimmt denkt, dass $ab'-ba' = 1$ ist,

$$\omega\rho' - \rho\omega' = \frac{\pi}{2}. \tag{e}$$

Führt man nun auch statt k eine andere Veränderliche vermittelst der Gleichung

$$\vartheta = \frac{\omega'}{\omega}\pi$$

ein, so hat man

$$k(1-k^2)\frac{\partial\vartheta}{\partial k} = k(1-k^2)\frac{\omega\frac{\partial\omega'}{\partial k} - \omega'\frac{\partial\omega}{\partial k}}{\omega^2}\pi = \frac{\omega(k^2\omega'-\rho') - \omega'(k^2\omega-\rho)}{\omega^2}\pi$$
$$= -\frac{\omega\rho'-\rho\omega'}{\omega^2}\pi = -\tfrac{1}{2}\frac{\pi^2}{\omega^2},$$

oder

$$k(1-k^2)\frac{\partial\vartheta}{\partial k} + 2\eta^2 = 0, \tag{f}$$

wonach sich dann die Gleichung für ψ in

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}$$

verwandelt. Also:

Setzt man

$$\omega = aK + bK'i, \qquad \omega' i = a'K + b'K'i, \qquad ab'-ba' = 1,$$
$$\tau = \frac{a(K-E) + bE'i}{aK + bK'i}, \qquad \eta = \frac{\pi}{2\omega}, \qquad \eta u = t, \qquad \frac{\omega'}{\omega}\pi = \vartheta,$$

$$\sqrt{\frac{k'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\, \varphi = \psi,$$

und betrachtet dann ψ als Function von t und ϑ, so transformirt sich die Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + 2k^2u\frac{\partial\varphi}{\partial u} + 2k(1-k^2)\frac{\partial\varphi}{\partial k} + k^2u^2\varphi = 0$$

in

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 4\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}. \qquad \text{(g)}$$

Nimmt man $a = 1$, $b = 0$, $a' = 0$, $b' = 1$, so geschieht der Bedingung $ab'-ba' = 1$ Genüge; man hat dann, wie im vorigen §,

$$\tau = 1-\frac{E}{K}, \qquad \eta = \frac{\pi}{2K}, \qquad \vartheta = \frac{K'}{K}\pi,$$

und die Functionen

$$\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_1, \quad \sqrt{\frac{k}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_2, \quad \sqrt{\frac{1}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)_3, \quad \sqrt{\frac{k'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau uu}\,\mathrm{Al}(u)$$

genügen, als Functionen von ϑ und $t = \eta u$ betrachtet, sämmtlich der Gleichung (g). Bezeichnet man sie der Reihe nach durch $\overline{\mathrm{Al}}(t)_1$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_2$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_3$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)$, so hat man nach § 4, (7.), weil t in $t+\pi$ übergeht, wenn $u+2K$ für u gesetzt wird,

(1.)
$$\begin{cases} \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi)_1 = -\overline{\mathrm{Al}}(t)_1, & \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi)_2 = -\overline{\mathrm{Al}}(t)_2, \\ \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi)_3 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_3, & \overline{\mathrm{Al}}(t+\pi) = \overline{\mathrm{Al}}(t), \end{cases}$$

und dem § 5 gemäss kann man also setzen

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Al}}(t)_1 &= \alpha_0\sin t + \alpha_1\sin 3t + \cdots + \alpha_r\sin(2r+1)t + \cdots \\
\overline{\mathrm{Al}}(t)_2 &= \beta_0\cos t + \beta_1\cos 3t + \cdots + \beta_r\cos(2r+1)t + \cdots \\
\overline{\mathrm{Al}}(t)_3 &= \tfrac{1}{2}\gamma_0 + \gamma_1\cos 2t + \gamma_2\cos 4t + \cdots + \gamma_r\cos 2rt + \cdots \\
\overline{\mathrm{Al}}(t) &= \tfrac{1}{2}\delta_0 + \delta_1\cos 2t + \delta_2\cos 4t + \cdots + \delta_r\cos 2rt + \cdots,
\end{aligned}$$

wo dann die Coefficienten Functionen von ϑ sind. Substituirt man diese Reihen in (g), so erhält man

$$4\frac{\partial\alpha_r}{\partial\vartheta} + (2r+1)^2\alpha_r = 0, \qquad 4\frac{\partial\beta_r}{\partial\vartheta} + (2r+1)^2\beta_r = 0,$$

$$\frac{\partial\gamma_r}{\partial\vartheta} + r^2\gamma_r = 0, \qquad \frac{\partial\delta_r}{\partial\vartheta} + r^2\delta_r = 0,$$

oder

$$\alpha_r = a_r e^{-\frac{(2r+1)^2}{4}\vartheta} = a_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}, \qquad \beta_r = b_r e^{-\frac{(2r+1)^2}{4}\vartheta} = b_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}}$$

$$\gamma_r = c_r e^{-r^2\vartheta} = c_r h^{r^2}, \qquad \delta_r = d_r e^{-r^2\vartheta} = d_r h^{r^2},$$

wo a_r, b_r, c_r, d_r Constanten sind.

Setzt man $u = 2K'i$, so wird $\mathrm{Al}(u)_1 = 0$; es geht aber dann t in ϑi über, und es wird

$$a_r \sin(2r+1)t = \frac{i}{2} a_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}} \left(e^{+(2r+1)\vartheta} - e^{-(2r+1)\vartheta}\right) = \frac{i}{2} a_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}} (h^{-(2r+1)} - h^{2r+1})$$

$$= \frac{i}{2} a_r h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r-3}{2}} - \frac{i}{2} a_r h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r+5}{2}},$$

und es muss also für jeden Werth von k

$$0 = \mathrm{S} a_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha-3}{2}} - \mathrm{S} a_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}},$$

oder

$$0 = a_0 h^{-\frac{3}{4}} + a_1 h^{-\frac{3}{4}} + \mathrm{S} a_{\alpha+2} h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}} - \mathrm{S} a_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}}$$

sein, wonach man $a_1 = -a_0$, $a_{\alpha+2} = a_\alpha$, und somit allgemein

$$a_\alpha = (-1)^\alpha a_0$$

erhält. Ferner, wenn man $u = K + 2K'i$ nimmt, so wird $\mathrm{Al}(u)_2 = 0$; aus t wird dann $\frac{\pi}{2} + \vartheta i$, und aus $\beta_r \cos(2r+1)t$

$$-(-1)^r b_r h^{\frac{(2r+1)^2}{4}} \sin(2r+1)\vartheta i = (-1)^r \frac{i}{2} b_r \left(h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r+5}{2}} - h^{\frac{2r+1}{2}\frac{2r-3}{2}}\right),$$

und es muss daher

$$0 = \mathrm{S}(-1)^\alpha b_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}} - \mathrm{S}(-1)^\alpha b_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha-3}{2}},$$

oder

$$0 = -b_0 h^{-\frac{3}{4}} + b_1 h^{-\frac{3}{4}} + \mathrm{S}(-1)^\alpha b_\alpha h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha+5}{2}} - \mathrm{S}(-1)^\alpha b_{\alpha+2} h^{\frac{2\alpha+1}{2}\frac{2\alpha-3}{2}}$$

sein, woraus

$$b_1 = b_0, \qquad b_{\alpha+2} = b_\alpha,$$

d. h. allgemein

$$b_\alpha = b_0$$

folgt.

$\mathrm{Al}(u)_3$ wird gleich Null, wenn $u = K + K'i$, und $\mathrm{Al}(u)$, wenn $u = K'i$ gesetzt wird; für den ersten Werth wird $t = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\vartheta i$,

$$\gamma_r \cos 2rt = \tfrac{1}{2}(-1)^r c_r h^{rr}(e^{r\vartheta} + e^{-r\vartheta}) = \tfrac{1}{2}(-1)^r c_r (h^{r(r-1)} + h^{r(r+1)});$$

für den zweiten wird

$$t = \tfrac{1}{2}\vartheta i, \qquad \delta_r \cos 2rt = \tfrac{1}{2} d_r h^{rr}(e^{r\vartheta} + e^{-r\vartheta}) = \tfrac{1}{2} d_r (h^{r(r-1)} + h^{r(r+1)}),$$

und man erhält somit

$$0 = \mathrm{S}(-1)^\alpha c_\alpha h^{\alpha(\alpha-1)} + \mathrm{S}(-1)^\alpha c_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)} = -\mathrm{S}(-1)^\alpha c_{\alpha+1} h^{\alpha(\alpha+1)} + \mathrm{S}(-1)^\alpha c_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)},$$
$$0 = \mathrm{S} d_\alpha h^{\alpha(\alpha-1)} + \mathrm{S} d_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)} = \mathrm{S} d_{\alpha+1} h^{\alpha(\alpha+1)} + \mathrm{S} d_\alpha h^{\alpha(\alpha+1)},$$

woraus

$$c_{\alpha+1} = c_\alpha, \qquad d_{\alpha+1} = -d_\alpha,$$

d. h.

$$c_\alpha = c_0, \qquad d_\alpha = (-1)^\alpha d_0$$

folgt. Demnach ergiebt sich

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{kk'}{\eta}} e^{\frac{1}{2}\tau u u} \mathrm{Al}(u)_1 &= a_0 \{ h^{\frac{1}{4}} \sin t - h^{\frac{9}{4}} \sin 3t + h^{\frac{25}{4}} \sin 5t - \cdots \} \\ \sqrt{\frac{k}{\eta}} e^{\frac{1}{2}\tau u u} \mathrm{Al}(u)_2 &= b_0 \{ h^{\frac{1}{4}} \cos t + h^{\frac{9}{4}} \cos 3t + h^{\frac{25}{4}} \cos 5t + \cdots \} \\ \sqrt{\frac{1}{\eta}} e^{\frac{1}{2}\tau u u} \mathrm{Al}(u)_3 &= c_0 \{ \tfrac{1}{2} + h \cos 2t + h \cos 4t + h^9 \cos 6t + \cdots \} \\ \sqrt{\frac{k'}{\eta}} e^{\frac{1}{2}\tau u u} \mathrm{Al}(u) &= d_0 \{ \tfrac{1}{2} - h \cos 2t + h^4 \cos 4t - h^9 \cos 6t + \cdots \}, \end{aligned} \right.$$

wo a_0, b_0, c_0, d_0 Constanten sind. Für $k = 0$ wird $h = 0$, und $\mathrm{Al}(u)_3$, sowie auch $\mathrm{Al}(u)$ gleich 1, und deshalb muss $c_0 = d_0 = 2$ sein. Dividirt man nun die dritte Gleichung in die zweite und setzt $u = 0$, $t = 0$, so findet sich

$$\sqrt{k} = b_0 \frac{h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots},$$

und wenn man die vierte in die erste dividirt und dann $u = K$, $t = \frac{\pi}{2}$ nimmt,

$$\sqrt{k} = a_0 \frac{h^{\frac{1}{4}} + h^{\frac{9}{4}} + h^{\frac{25}{4}} + \cdots}{1 + 2h + 2h^4 + 2h^9 + \cdots},$$

und daher $a_0 = b_0$. Wird aber h nach Potenzen von k entwickelt, so ist das erste Glied gleich $16k^2$, und daher muss $a_0 = b_0 = 2$ sein.

Somit erhält man, wenn man wieder ηu für t setzt,

$$(3.)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{kk'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u)_1 = 2h^{\frac{1}{4}} \sin \eta u - 2h^{\frac{9}{4}} \sin 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}} \sin 5\eta u - \cdots \\ \sqrt{\frac{k}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u)_2 = 2h^{\frac{1}{4}} \cos \eta u + 2h^{\frac{9}{4}} \cos 3\eta u + 2h^{\frac{25}{4}} \cos 5\eta u + \cdots \\ \sqrt{\frac{1}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u)_3 = 1 + 2h \cos 2\eta u + 2h^4 \cos 4\eta u + 2h^9 \cos 6\eta u + \cdots \\ \sqrt{\frac{k'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u) = 1 - 2h \cos 2\eta u + 2h^4 \cos 4\eta u - 2h^9 \cos 6\eta u + \cdots, \end{cases}$$

ganz wie im vorigen §, nur dass hier zugleich für den durch die unendliche Reihe

$$1 - 2h + 2h^4 - 2h^9 + \cdots$$

gegebenen Ausdruck g der Werth $\sqrt{\frac{k'}{\eta}}$ gefunden ist.

Anmerkung. Es seien $2m+1$, $2n$ zwei ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor, und $2m'$, $2n'+1$ zwei andere, welche der Gleichung

$$(2m+1)(2n'+1) - 2n \,.\, 2m' = 1$$

genügen,

$$\omega = (2m+1)K + 2nK'i, \quad \omega' i = 2m'K + (2n'+1)K'i, \quad \tau = \frac{(2m+1)(K-E) + 2nE'i}{(2m+1)K + 2nK'i},$$

$$\eta = \frac{\pi}{2\omega}, \qquad \vartheta = \frac{\omega'}{\omega}\pi, \qquad h = e^{-\vartheta}, \qquad t = \eta u,$$

$$\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u)_1 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_1, \qquad \sqrt{\frac{k}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u)_2 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_2$$

$$\sqrt{\frac{1}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u)_3 = \overline{\mathrm{Al}}(t)_3, \qquad \sqrt{\frac{k'}{\eta}}\, e^{\frac{1}{2}\tau u u}\, \mathrm{Al}(u) = \overline{\mathrm{Al}}(t),$$

so bestehen — nach § 4, (12.) — auch für diese Functionen die Gleichungen (1.); und auch sie können daher dem § 5 gemäss in convergirende Reihen von der Form (2.) entwickelt werden. Da sie ferner, wie oben bewiesen worden, sämmtlich der Differentialgleichung (g) genügen, und auch $\overline{\mathrm{Al}}(t)_1$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_2$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)_3$, $\overline{\mathrm{Al}}(t)$ verschwinden, wenn man für u resp. die Werthe $2\omega' i$, $\omega + 2\omega' i$, $\omega + \omega' i$, $\omega' i$ setzt, sowie die vorher betrachteten Functionen Null wurden für $2K'i$, $K + 2K'i$, $K + K'i$, $K'i$, so erhellt, dass man auch hier ganz unverändert die Gleichungen (2.) erhalten muss. Die Constanten a_0, b_0, c_0, d_0 können freilich nicht auf dieselbe Weise bestimmt werden; man findet aber ver-

mittelst der Formeln (12.) bis (14.) des § 4, dass jede dieser Grössen einen von den vier Werthen $+2$, -2, $+2i$, $-2i$ hat, dessen nähere Bestimmung von den angenommenen Werthen von m, n abhängt. Die Gleichungen (3.) bestehen also auch noch, wenn man unter h, η_1, τ die hier angegebenen Ausdrücke versteht, und nur für $\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}$, $\sqrt{\frac{k}{\eta}}$, $\sqrt{\frac{1}{\eta}}$, $\sqrt{\frac{k'}{\eta}}$ resp. $\varepsilon_1\sqrt{\frac{kk'}{\eta}}$, $\varepsilon_2\sqrt{\frac{k}{\eta}}$, $\varepsilon_3\sqrt{\frac{1}{\eta}}$, $\varepsilon_4\sqrt{\frac{k'}{\eta}}$ setzt, wo jeder der Multiplicatoren ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 einen von den Werthen $+1$, -1, $+i$, $-i$ haben muss.

Auf diese Weise gelangt man zu unzählig vielen verschiedenen Entwicklungen der Hülfs-Functionen; verbindet man noch diejenigen hiermit, welche man erhält, wenn man in den Gleichungen (3.) ui für u, k' für k, sowie auch ku für u und $\frac{1}{k}$ für k setzt, und dann wieder zu den Functionen des Moduls k übergeht, so bekommt man alle möglichen Entwicklungen von dieser Art. Man kann übrigens alle diese mit Benutzung der Formeln (11.) bis (14.) des § 4 durch ein dem im vorigen § angewandten ganz analoges Verfahren herleiten.

§ 8.

Es ist nun noch übrig, die Hülfs-Functionen in der Form von unendlichen Producten darzustellen.

Es wird $\mathrm{Al}(u) = 0$ für alle Werthe von u, für welche $\mathrm{sn}u$ die Form $\frac{1}{0}$ erhält, und nur für diese, welche sämmtlich von der Form $2\alpha K + (2\beta+1)K'i$ sind, wo für α, β alle möglichen ganzen Zahlen zu setzen. Für diese wird aber (wenn die Bezeichnung des § 6 beibehalten wird)

$$2\eta_1 ui = 2\alpha\pi i - (2\beta+1)\vartheta i, \qquad z^2 = e^{2\alpha\pi i-(2\beta+1)\vartheta i} = h^{2\beta+1}.$$

Bildet man daher das unendliche Product

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{(1-hz^2)(1-h^3z^2)\cdots(1-h^{2r+1}z^2)\cdots}{(1-h)(1-h^3)\cdots(1-h^{2r+1})\cdots}\cdot\frac{(1-hz^{-2})(1-h^3z^{-2})\cdots(1-h^{2r+1}z^{-2})\cdots}{(1-h)(1-h^3)\cdots(1-h^{2r+1})\cdots},$$

so ist klar, dass auch dieses gleich Null wird, sobald $z = h^{2\beta+1}$ gesetzt wird, und es ist daher zu erwarten, dass es in einer einfachen Beziehung zu $\mathrm{Al}(u)$ stehe.

Setzt man hz für z, so ergiebt sich

$$\mathfrak{F}(z) = -hz^2\mathfrak{F}(hz),$$

und für $z = 1$ wird $\mathfrak{F}(z) = 1$. Nun kann offenbar $\mathfrak{F}(z)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + A_1(z^2+z^{-2}) + \cdots + A_r(z^{2r}+z^{-2r}) + \cdots$$

entwickelt werden; berücksichtigt man aber, dass in § 6 die Entwicklung von $F(z)$ in eine Reihe von derselben Form einzig vermittelst der durch die Gleichungen

$$F(z) = -hz^2F(hz), \qquad F(1) = 1$$

ausgedrückten Eigenschaften dieser Function bewerkstelligt wurde, so erhellt sofort, dass

$$\mathfrak{F}(z) = F(z)$$

sein muss, sobald nur bewiesen ist, dass das in Rede stehende unendliche Product convergent ist.

Man setze

$$\varphi(z) = 1 + A_1 z^2 + A_2 z^4 + \cdots + A_r z^{2r} + \cdots$$

und bestimme die Coefficienten dieser Reihe so, dass

$$\varphi(z) = (1 - hz^2)\varphi(hz)$$

ist. Diese Eigenschaft führt zu der Recursions-Formel

$$A_r = -\frac{h^{2r-1}}{1-h^{2r}} A_{r-1},$$

woraus

$$A_r = (-1)^r \frac{h^{rr}}{1-h^2 . 1-h^4 \ldots 1-h^{2r}}$$

folgt, so dass man

$$\varphi(z) = 1 - \frac{h}{1-h^2} z^2 + \frac{h^4}{1-h^2 . 1-h^4} z^4 - \cdots$$

erhält. Weil die Reihen (6.) des § 6 beständig convergiren, so muss der absolute Betrag von h kleiner als 1 sein, welches auch der Werth von k sei (mit der einzigen Einschränkung, dass k nicht gleich 1 sein darf, weil in diesem Falle $\eta = 0$ wird und daher jene Reihen nicht verwendbar sind); deshalb wird $\frac{A_r}{A_{r-1}} = 0$ für $r = \infty$, und daraus folgt, dass die für $\varphi(z)$ erhaltene Reihe für jeden Werth von z convergirt. Durch wiederholte Anwendung der Gleichung

$$\varphi(z) = (1 - hz^2)\varphi(hz)$$

findet sich aber

$$\varphi(z) = (1 - hz^2)(1 - h^3 z^2) \cdots (1 - h^{2r+1} z^2)\varphi(h^{2r+1} z),$$

und daher, weil für $r = \infty$

$$h^{2r+1} z = 0, \qquad \varphi(h^{2r+1} z) = 1$$

wird,

$$\varphi(z) = \text{dem unendlichen Producte } (1-hz^2)(1-h^3z^2)\cdots(1-h^{2r+1}z^2)\cdots$$
$$\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \text{„ „ „ } (1-hz^{-2})(1-h^3z^{-2})\cdots(1-h^{2r+1}z^{-2})\cdots,$$

und

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\varphi(z)\,\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi(1)\,\varphi(1)}.$$

Es hat also $\mathfrak{F}(z)$ für jeden Werth von z einen bestimmten, endlichen Werth; und weil $\varphi(z)$ durch eine beständig convergirende Reihe dargestellt ist, so kann, wenn man $z = e^{\eta u i}$, und $\frac{1}{z} = e^{-\eta u i}$ setzt, $\varphi(z)$, $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ und somit auch $\mathfrak{F}(z)$ nach ganzen Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickelt werden, woraus dann, in Verbindung mit dem Umstande, dass $\mathfrak{F}(z)$ ungeändert bleibt, wenn $u+2K$ für u gesetzt wird, unmittelbar folgt, dass $\mathfrak{F}(z)$ durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0 + 2A_1\cos 2\eta u + 2A_2\cos 4\eta u + \cdots,$$

oder

$$A_0 + A_1(z^2+z^{-2}) + A_2(z^4+z^{-4}) + \cdots$$

darstellbar ist. Nach dem oben Gesagten kann man also in der That schliessen, dass

$$\mathfrak{F}(z) = \mathrm{F}(z)$$

ist.

Vermöge der Gleichungen (1, 3, 4, 5) des § 6 ergiebt sich nun

$$(1.)\quad \begin{cases} \sqrt{k}\,e^{\frac{1}{4}\tau u u}\,\mathrm{Al}(u)_1 = Gh^{\frac{1}{4}}\left(\frac{z-z^{-1}}{i}\right)(1-h^2z^2)(1-h^4z^2)\cdots(1-h^{2r}z^2)\cdots\times(1-h^2z^{-2})(1-h^4z^{-2})\cdots(1-h^{2r}z^{-2})\cdots \\ \sqrt{\frac{k}{k'}}\,e^{\frac{1}{4}\tau u u}\,\mathrm{Al}(u)_2 = Gh^{\frac{1}{4}}\,(z+z^{-1})\,(1+h^2z^2)(1+h^4z^2)\cdots(1+h^{2r}z^2)\cdots\times(1+h^2z^{-2})(1+h^4z^{-2})\cdots(1+h^{2r}z^{-2})\cdots \\ \sqrt{\frac{1}{k'}}\,e^{\frac{1}{4}\tau u u}\,\mathrm{Al}(u)_3 = G(1+hz^2)(1+h^3z^2)\cdots(1+h^{2r+1}z^2)\cdots\times(1+hz^{-2})(1+h^3z^{-2})\cdots(1+h^{2r+1}z^{-2})\cdots \\ e^{\frac{1}{4}\tau u u}\,\mathrm{Al}(u) = G(1-hz^2)(1-h^3z^2)\cdots(1-h^{2r+1}z^2)\cdots\times(1-hz^{-2})(1-h^3z^{-2})\cdots(1-h^{2r+1}z^{-2})\cdots, \end{cases}$$

wo

$$\frac{1}{G} = (1-h)^2(1-h^3)^2\cdots(1-h^{2r+1})^2\cdots$$

ist.

Man hat

$$(1-h^r z^2)(1-h^r z^{-2}) = 1-2h^r\cos 2\eta_1 u+h^{2r} = (1-h^r)^2+4h^r\sin\eta_1 u^2$$

$$(1+h^r z^2)(1+h^r z^{-2}) = 1+2h^r\cos 2\eta_1 u+h^{2r} = (1+h^r)^2-4h^r\sin\eta_1 u^2$$

$$1-h^r = h^{\frac{r}{2}}(h^{-\frac{r}{2}}-h^{\frac{r}{2}}) = -2h^{\frac{r}{2}}\mathfrak{Sin}\frac{r}{2}\vartheta = -2h^{\frac{r}{2}}\mathfrak{Sin}\, r\eta_1 K'$$

$$1+h^r = h^{\frac{r}{2}}(h^{-\frac{r}{2}}+h^{\frac{r}{2}}) = 2h^{\frac{r}{2}}\mathfrak{Cos}\frac{r}{2}\vartheta = 2h^{\frac{r}{2}}\mathfrak{Cos}\, r\eta_1 K',$$

also

$$(1-h^r z^2)(1-h^r z^{-2}) = (1-h^r)^2\left(1+\frac{\sin\eta_1 u^2}{\mathfrak{Sin}\, r\eta_1 K'^2}\right)$$

$$(1+h^r z^2)(1-h^r z^{-2}) = (1+h^r)^2\left(1-\frac{\sin\eta_1 u^2}{\mathfrak{Cos}\, r\eta_1 K'^2}\right).$$

Hiernach lassen sich die Gleichungen (1.), wenn man zugleich berücksichtigt, dass für $u=0$ $\frac{\mathrm{Al}(u)_1}{u}=1$, $\mathrm{Al}(u)_2=1$, $\mathrm{Al}(u)_3=1$, $\mathrm{Al}(u)=1$ ist, und daher

$$\sqrt{k} = 2G\eta_1 h^{\frac{1}{4}}(1-h^2)^2(1-h^4)^2\cdots(1-h^{2r})^2\cdots$$

$$\sqrt{\frac{k}{k'}} = Gh^{\frac{1}{4}}(1+h^2)^2(1+h^4)^2\cdots(1+h^{2r})^2\cdots$$

$$\sqrt{\frac{1}{k'}} = G(1+h)^2(1+h^3)^2\cdots(1+h^{2r+1})^2\cdots$$

sein muss, also darstellen:

(2.)
$$\left\{\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_1 &= \frac{1}{\eta}\sin\eta_1 u\,.\,\mathrm{P}\left\{1+\frac{\sin\eta_1 u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+2)\eta_1 K'^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_2 &= \cos\eta_1 u\,.\,\mathrm{P}\left\{1-\frac{\sin\eta_1 u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+2)\eta_1 K'^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u)_3 &= \mathrm{P}\left\{1-\frac{\sin\eta_1 u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+1)\eta_1 K'^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau uu}\mathrm{Al}(u) &= \mathrm{P}\left\{1+\frac{\sin\eta_1 u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+1)\eta_1 K'^2}\right\}.
\end{aligned}\right. \qquad (\alpha=0,1,2,\cdots+\infty)$$

Setzt man ui für u, k' für k, so erhält man vermittelst der Formeln (4.) des § 4:

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)_1 &= \frac{1}{\eta'}\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u\,.\,\mathrm{P}\left\{1-\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+2)\,\eta' K^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)_2 &= \mathrm{P}\left\{1-\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Sin}\,(2\alpha+1)\,\eta' K^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u)_3 &= \mathrm{P}\left\{1+\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+1)\,\eta' K^2}\right\}\\
e^{\frac{1}{2}\tau' uu}\,\mathrm{Al}(u) &= \mathfrak{Cos}\,\eta' u\,.\,\mathrm{P}\left\{1+\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' u^2}{\mathfrak{Cos}\,(2\alpha+2)\,\eta' K^2}\right\}.
\end{aligned}\right. \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \cdots +\infty)$$

Anmerkung. Es behalten die Gleichungen (2.) ihre Gültigkeit, wenn man für η, τ die in der Anmerkung zum vorhergehenden § angegebenen Werthe, sowie ω' für K' setzt. Ebenso verhält es sich mit den Gleichungen (3.), wenn für K, η', τ' resp.

$$\omega,\quad \frac{\pi}{2\omega},\quad \frac{2m'(K-E)+(2n'+1)E'i}{2m'K+(2n'+1)K'i}$$

genommen wird.

Westernkotten in Westfalen, Sommer 1840.

ANMERKUNGEN.

Die vorstehende, im Sommer 1840 verfasste Abhandlung ist von mir im Herbst desselben Jahres der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Münster Behufs Erlangung der Facultas docendi vorgelegt worden. Von meinem verehrten Lehrer Gudermann, der mich im Winter vorher in die Theorie der elliptischen Functionen („Modular-Functionen", wie er sie nannte) eingeführt hatte, sehr günstig beurtheilt, sollte sie gedruckt werden. Dies ist jedoch aus Gründen, auf die ich hier nicht näher eingehen mag, unterbliehen. Einen Theil ihres Inhalts habe ich aber später im 52sten Bande des Crelle'schen Journals (S. 346—379) mitgetheilt und bin seitdem mehrfach aufgefordert worden, die ganze Arbeit zu veröffentlichen, was „namentlich den für die Geschichte der elliptischen Transcendenten sich interessirenden Mathematikern erwünscht sein werde". Dies hat mich bestimmt, die Gesammtausgabe meiner mathematischen Abhandlungen mit der in Rede stehenden zu beginnen. Ich habe nichts an ihr geändert — auch nicht die Gudermann'schen Benennungen und Bezeichnungen — mit der einzigen Ausnahme, dass an Stelle der in meinem Manuscript gebrauchten Functionszeichen

$$A(u), \qquad B(u), \qquad C(u), \qquad D(u)$$

bei der Drucklegung die später von mir und anderen Mathematikern angewandten:

$$\mathrm{Al}(u)_1, \qquad \mathrm{Al}(u)_2, \qquad \mathrm{Al}(u)_3, \qquad \mathrm{Al}(u)$$

getreten sind.

---

1) Vgl. die nachfolgende Abhandlung: Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen.

2) Hier hätte bemerkt werden müssen, dass

$$\mathrm{sn}\,u, \qquad \mathrm{cn}\,u, \qquad \mathrm{dn}\,u, \qquad \mathrm{Al}(u), \qquad \mathrm{Al}(u)_1, \qquad \mathrm{Al}(u)_2, \qquad \mathrm{Al}(u)_3$$

eindeutige analytische Functionen der beiden Grössen u, k sind und deshalb alle für das Differentiiren solcher Functionen geltenden Regeln auf sie angewandt werden können. Dies wird in der im Vorstehenden angegebenen Abhandlung nachgewiesen.

3) Die Bezeichnungen 1', 2', 3', ... sind gleichbedeutend mit den jetzt gebräuchlich gewordenen

$$1!, \quad 2!, \quad 3!, \quad \ldots$$

DARSTELLUNG EINER ANALYTISCHEN FUNCTION EINER COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN, DEREN ABSOLUTER BETRAG ZWISCHEN ZWEI GEGEBENEN GRENZEN LIEGT.

§ 1.

Es sei x eine Veränderliche, welche jeden (reellen oder complexen) Werth erhalten kann, dessen absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen A, B liegt, und $F(x)$ sei eine Function derselben, über deren Charakter wir folgende Annahmen machen:

1) sie habe für jeden Werth von x, der innerhalb der bezeichneten Grenzen enthalten ist, einen bestimmten endlichen Werth;

2) sie sei in der Nähe eines jeden solchen Werthes von x continuirlich;

3) es sei für jeden unendlich kleinen Werth von k der Unterschied der Quotienten:

$$\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk}, \qquad \frac{F(x+k)-F(x)}{k}$$

ebenfalls unendlich klein für jeden Werth von x innerhalb der bezeichneten Grenzen und für jeden Werth von h, dessen absoluter Betrag eine bestimmte Grenze nicht überschreitet.

Es soll nun bewiesen werden, dass sich unter diesen Voraussetzungen $F(x)$ durch eine für alle Werthe von x innerhalb jener Grenzen absolut convergente Reihe

$$\begin{aligned} &A_0+A_1x \quad +A_2x^2 \quad +\cdots+A_\nu x^\nu+\cdots \\ &\quad +A_{-1}x^{-1}+A_{-2}x^{-2}+\cdots+A_{-\nu}x^{-\nu}+\cdots = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu \end{aligned} \tag{1.}$$

darstellen lasse, wo die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots$ von x unabhängig sind.

§ 2.

Zu dem Ende bestimmen wir zunächst den Werth des Integrals

$$J = \int x^n dx,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet und die Integration im positiven Sinne über alle diejenigen Werthe von x, die einen und denselben absoluten Betrag haben, sich erstrecken soll. Eine complexe Grösse $a+bi$, deren absoluter Betrag r ist, lässt sich darstellen in der Form

$$a+bi = r\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i},$$

wo λ jeden reellen Werth zwischen $-\infty$ und $+\infty$ haben kann. Setzt man daher

$$w = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, \qquad \frac{dw}{d\lambda} = \frac{2i}{(1-\lambda i)^2}$$

mit der Bestimmung, dass λ eine reelle Veränderliche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ bedeuten soll, so hat man

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} (rw)^n . r\frac{dw}{d\lambda} d\lambda = r^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} w^n \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Es ist aber

$$w^n \frac{dw}{d\lambda} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{d}{d\lambda}(w^{n+1}),$$

also

$$\int_{-\mu}^{+\mu} w^n \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1+\mu i}{1-\mu i}\right)^{n+1} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{1-\mu i}{1+\mu i}\right)^{n+1}.$$

Wächst nun μ ohne Ende, so nähert sich sowohl $\frac{1+\mu i}{1-\mu i}$ als $\frac{1-\mu i}{1+\mu i}$ der Grenze -1, also ist

$$J = 0.$$

Diese Bestimmung hat nur eine Ausnahme, wenn $n = -1$ ist. Alsdann ist

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{w} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 4i\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Das Integral $\int_0^\infty \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$ ist bekanntlich gleich $\frac{\pi}{2}$; es reicht aber aus, zu wissen, dass es einen endlichen Werth hat, was so gezeigt werden kann. Es ist

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} + \int_1^\infty \frac{d\lambda}{1+\lambda^2};$$

setzt man aber in dem zweiten Integral

$$\lambda = \frac{1}{\lambda'}, \qquad d\lambda = -\frac{d\lambda'}{\lambda'^2},$$

so ist

$$\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = -\frac{d\lambda'}{1+\lambda'^2},$$

$$\int_1^\infty \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = -\int_1^0 \frac{d\lambda'}{1+\lambda'^2} = \int_0^1 \frac{d\lambda'}{1+\lambda'^2} = \int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda^2},$$

mithin

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 2\int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Bezeichnen wir nun das bestimmte Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 4\int_0^1 \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$$

durch π, so ist der Werth von

$$\int x^n dx$$

in dem oben erklärten Sinne gleich $2\pi i$ für $n = -1$ und gleich Null für jeden anderen ganzzahligen Werth von n.

Betrachten wir jetzt das Integral

$$K = \int F(x) \frac{dx}{x},$$

wo wir uns ebenfalls die Integration über alle diejenigen Werthe von x ausgedehnt denken, welche denselben absoluten Betrag r haben, unter der Voraussetzung, dass r zwischen den Grenzen A, B liege, so ist zunächst:

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(rw)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Ist nun x_0 irgend ein bestimmter Werth von x, dessen absoluter Betrag gleich r ist, so können wir setzen

$$x_0 = r\frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \qquad rw = x_0\frac{1-\mu i}{1+\mu i}\cdot\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} = x_0\frac{1+\dfrac{\lambda-\mu}{1+\mu\lambda}i}{1-\dfrac{\lambda-\mu}{1+\mu\lambda}i},$$

und es verwandelt sich, wenn $\lambda' = \frac{\lambda-\mu}{1+\mu\lambda}$, $w' = \frac{1+\lambda' i}{1-\lambda' i}$ gesetzt wird, der Ausdruck für K in

$$K = \int \frac{F(x_0 w')}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda',$$

wo wir noch die Grenzen, innerhalb welcher die Integration auszuführen ist, zu bestimmen haben. Wenn zunächst μ positiv ist, so liegt,

wenn λ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $-\frac{1}{\mu}$ enthalten ist, λ' zwischen $\frac{1}{\mu}$ und $+\infty$,

„ λ „ „ „ $-\frac{1}{\mu}$ und $+\mu$ „ „, λ' „ $-\infty$ und 0,

„ λ „ „ „ $+\mu$ und $+\infty$ „ „, λ' „ 0 und $+\frac{1}{\mu}$.

Wenn aber μ negativ ist, so liegt,

wenn λ zwischen den Grenzen $-\infty$ und μ enthalten ist, λ' zwischen $\frac{1}{\mu}$ und 0,

„ λ „ „ „ μ und $-\frac{1}{\mu}$ „ „, λ' „ 0 und $+\infty$,

„ λ „ „ „ $-\frac{1}{\mu}$ und $+\infty$ „ „, λ' „ $-\infty$ und $\frac{1}{\mu}$.

Hieraus folgt, dass sich die Integration in Beziehung auf λ' ebenfalls von $\lambda' = -\infty$ bis $\lambda' = +\infty$ zu erstrecken hat; man hat also

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w')}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda',$$

oder, wenn man λ für λ', w für w' schreibt,

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda.$$

Sind daher x_0 und x_1 irgend zwei Werthe, deren absolute Beträge zwischen A und B liegen, so ist

(2.) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_1 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Es ist übrigens

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{0} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda + \int_{0}^{\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Setzt man in dem ersten Integral $-\lambda$ für λ, so verwandelt sich w in $\frac{1}{w}$, $\frac{dw}{w}$ in $-\frac{dw}{w}$, und man erhält daher

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = -\int_{+\infty}^{0} \frac{F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{0}^{\infty} \frac{F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda,$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{0}^{\infty} \frac{F(x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{F(x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda + \int_{1}^{\infty} \frac{F(x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Setzt man in dem zweiten Integral $\frac{1}{\lambda}$ für λ, so verwandelt sich w in $-\frac{1}{w}$, $\frac{dw}{w}$ in $-\frac{dw}{w}$, und man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{0}^{1} \frac{F(x_0 w) + F(-x_0 w) + F\left(\frac{x_0}{w}\right) + F\left(-\frac{x_0}{w}\right)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda,$$

woraus deutlich hervorgeht, dass das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

einen bestimmten endlichen Werth hat. Nach dem soeben Bewiesenen kann derselbe nur von dem absoluten Betrage r von x_0 abhängen; wir wollen daher

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

mit $\varphi(r)$ bezeichnen.

Setzen wir nun, unter ε eine reelle positive Zahl verstehend,

$$x_1 = x_0 \frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i},$$

so hat x_1 denselben absoluten Betrag wie x_0, und man hat daher nach (2.), wenn man

$$\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i} = 1+h\varepsilon; \qquad h = \frac{2i}{1-\varepsilon i} = \frac{-2\varepsilon+2i}{1+\varepsilon^2}$$

setzt,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w + x_0 h\varepsilon w)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

oder

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w + x_0 h\varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 h\varepsilon w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = 0.$$

Sind nun a, b irgend zwei positive zwischen den Grenzen A, B gelegene Werthe, und E irgend eine gegebene Grösse, die so klein angenommen werden kann, als man nur will, so lässt sich vermöge der in § 1 hinsichtlich der Function $F(x)$ gemachten Voraussetzung 3), wenn man

$$\frac{F(x+k)-F(x)}{k} = \frac{F(x+hk)-F(x)}{hk} + R$$

setzt, unter der Bedingung, dass h eine bestimmte Grösse nicht überschreite, wie das in unserem Falle wirklich stattfindet, wo der absolute Betrag von h gleich $\frac{2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ist, für k eine Grenze ρ dergestalt bestimmen, dass für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag nicht ausserhalb der Grenzen a, b liegt, und für jeden Werth von k, dessen absoluter Betrag die Grenze ρ nicht übersteigt, der absolute Betrag von R kleiner als E ist. Setzt man daher

$$x = x_0 w, \qquad k = x_0 \varepsilon w$$

und

$$\frac{F(x_0 w + x_0 \varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 \varepsilon w} = \frac{F(x_0 w + x_0 h\varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 h\varepsilon w} + R,$$

so wird R kleiner als E sein, wenn r nicht ausserhalb der Grenzen a, b liegt und ε kleiner als ρ ist. Nach dem eben Bewiesenen erhält man aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w + x_0 \varepsilon w) - F(x_0 w)}{x_0 \varepsilon w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} R \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$$

oder

$$\frac{\varphi(r+x_0\varepsilon)-\varphi(r)}{x_0\varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} R\frac{dw}{d\lambda}d\lambda.$$

Es ist aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R\frac{dw}{d\lambda}d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} 2iwR\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Da nun $\frac{1}{1+\lambda^2}$ innerhalb der Grenzen der Integration positiv ist, so ist der absolute Betrag von $\int_{-\infty}^{+\infty} 2iwR\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$ kleiner als der grösste absolute Werth, den $2iwR$ innerhalb der Grenzen der Integration erhalten kann, multiplicirt mit $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$, also kleiner als $2\pi E$.

Setzen wir nun

$$x_0\varepsilon = \frac{b-a}{n},$$

wobei wir unter n eine positive ganze Zahl verstehen, so ist

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{\varphi(a+\nu x_0\varepsilon+x_0\varepsilon)-\varphi(a+\nu x_0\varepsilon)}{nx_0\varepsilon};$$

und nimmt man n so gross an, dass $\frac{b-a}{n}$ kleiner als ρ wird, so ist für jeden Werth von ν der absolute Betrag von

$$\frac{\varphi(a+\nu x_0\varepsilon+x_0\varepsilon)-\varphi(a+\nu x_0\varepsilon)}{nx_0\varepsilon}$$

kleiner als $\frac{2\pi}{n}E$, woraus folgt, dass der absolute Betrag von

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$$

kleiner als $2\pi E$ ist. Die Grösse E kann aber so klein angenommen werden, als man nur immer will; mithin kann $\varphi(b)$ nicht von $\varphi(a)$ verschieden sein, d. h. der Werth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0w)}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda$$

ist für alle Werthe von x_0, deren absoluter Betrag zwischen den Grenzen A, B enthalten ist, derselbe.

Nehmen wir statt $F(x)$ die Function $x^n.F(x)$, wo n irgend eine ganze Zahl bedeute, so lässt sich leicht zeigen, dass für dieselbe ebenfalls die in

§ 1 hinsichtlich $F(x)$ gemachten Annahmen gleichzeitig gelten. Dies ist unmittelbar klar hinsichtlich der beiden ersten; was die dritte betrifft, so hat man

$$\frac{(x+hk)^n.F(x+hk)-x^n.F(x)}{hk}-\frac{(x+k)^n.F(x+k)-x^n.F(x)}{k}$$
$$=\frac{(x+hk)^n-x^n}{hk}\cdot F(x+hk)+x^n\cdot\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk}$$
$$-\frac{(x+k)^n-x^n}{k}\cdot F(x+k)-x^n\cdot\frac{F(x+k)-F(x)}{k}$$
$$=\left\{\frac{(x+hk)^n-x^n}{hk}-\frac{(x+k)^n-x^n}{k}\right\}F(x+hk)+\frac{(x+k)^n-x^n}{k}\{F(x+hk)-F(x)\}$$
$$+x^n\left\{\frac{F(x+hk)-F(x)}{hk}-\frac{F(x+k)-F(x)}{k}\right\}.$$

Jedes Glied dieser Summe wird aber, da $\frac{(x+k)^n-x^n}{k}$, wenn k unendlich klein wird, der Grenze nx^{n-1} sich nähert, unter der Bedingung, dass h eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, für alle Werthe von x innerhalb der festgelegten Grenzen mit k zugleich unendlich klein. Die Function $x^n.F(x)$ hat also ganz denselben Charakter wie $F(x)$, woraus sich denn sofort ergiebt, dass auch der Werth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x_0w)^n\frac{F(x_0w)}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda$$

derselbe bleibt für alle Werthe von x_0 innerhalb der bezeichneten Grenzen.

§ 3.

Nehmen wir nun an, dass sich $F(x)$ in der That in eine Reihe von der in § 1 angegebenen Form entwickeln lasse, also für jeden Werth von x innerhalb der bezeichneten Grenzen

$$F(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu x^\nu \tag{3.}$$

sei, so lassen sich unter dieser Voraussetzung die Coefficienten der Reihe leicht bestimmen. Denn aus (3.) folgt

$$F(x).x^{-n}=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu x^{\nu-n}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0w)}{w}(x_0w)^{-n}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}A_\nu.\int_{-\infty}^{+\infty}(x_0w)^{\nu-n}\frac{1}{w}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda.$$

Aber, wie oben bewiesen, ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 w)^{\nu-n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = 0$$

für alle Werthe von ν mit Ausnahme von $\nu = n$, wo dasselbe gleich $2\pi i$ ist. Somit erhält man

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0 w)}{w} (x_0 w)^{-n} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda. \tag{4.}$$

Hieraus folgt zunächst, dass, wenn $F(x)$ durch eine Reihe von der in Rede stehenden Form dargestellt werden kann, dies nur auf eine einzige Weise möglich ist. Es ist daher zu beweisen: 1), dass die Reihe

$$\sum A_\nu x^\nu,$$

wenn in ihr die Coefficienten A_ν nach (4.) bestimmt werden, für alle Werthe von x innerhalb der bezeichneten Grenzen unbedingt convergirt, und 2), dass ihre Summe wirklich gleich $F(x)$ ist.

Sind a, b irgend zwei Werthe zwischen A und B, von denen a kleiner und b grösser als der absolute Betrag von x ist, so kann man setzen

$$A_\nu = \frac{b^{-\nu}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{-\nu} \frac{F(bw)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \frac{b^{-\nu}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w^{-\nu} F(bw) \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2},$$

$$A_{-\nu} = \frac{a^\nu}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} w^\nu \frac{F(aw)}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \frac{a^\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w^\nu F(aw) \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Nun existirt, wenn man der Grösse λ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, für den absoluten Betrag von $F(aw)$ und ebenso für den von $F(bw)$ eine obere Grenze; bezeichnet man erstere mit M und letztere mit N, so ist unter der Voraussetzung, dass ν eine positive Zahl bedeute, der absolute Betrag von A_ν kleiner als $Nb^{-\nu}$ und der von $A_{-\nu}$ kleiner als Ma^ν. Mithin ist, wenn r den absoluten Werth von x bezeichnet, der absolute Betrag von $A_\nu x^\nu$ kleiner als $N\left(\frac{r}{b}\right)^\nu$ und der von $A_{-\nu} x^{-\nu}$ kleiner als $M\left(\frac{a}{r}\right)^\nu$. Da nun $\frac{r}{b}$, $\frac{a}{r}$ beide kleiner als 1 sind, so ergiebt sich hieraus sofort, dass jede der Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_{-\nu} x^{-\nu}$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

unbedingt convergirt.

Um nun den Werth von $\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$ zu bestimmen, verfahren wir so. Es sei ε eine positive Veränderliche, welche kleiner als 1 ist, so ist, weil $\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$ convergirt,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu = \lim_{\varepsilon=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu \varepsilon^\nu x^\nu$$

und ebenso:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_{-\nu} x^{-\nu} = \lim_{\varepsilon=1} \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_{-\nu} \varepsilon^\nu x^{-\nu}$$

(Conf.: Abel, Oeuvres complètes pag. 69. Theorem IV).

Wir können aber setzen

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(xw)}{w} (xw)^{-\nu} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda,$$

$$A_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(xw)}{w} (xw)^{\nu} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda,$$

und daher ist

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_\nu \varepsilon^\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(xw)}{w} \left(\frac{\varepsilon}{w}\right)^\nu \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(xw)}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{w}} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda;$$

ferner

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} A_{-\nu} x^{-\nu} \varepsilon^\nu = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(xw) \frac{\varepsilon^\nu w^\nu}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} F(xw) \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda,$$

und daher

$$(5.) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon=1} \int_{-\infty}^{+\infty} F(xw) \left\{ \frac{1}{w-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w} \right\} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Setzt man nun

$$\frac{w-\varepsilon}{1-\varepsilon w} = w', \qquad w = \frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'},$$

so hat man

$$\frac{dw'}{w'} = \frac{dw}{w-\varepsilon} + \frac{\varepsilon\, dw}{1-\varepsilon w}.$$

Es ist aber

$$w-\varepsilon = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} - \varepsilon = \frac{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)\lambda i}{1-\lambda i}, \qquad 1-\varepsilon w = \frac{1-\varepsilon-(1+\varepsilon)\lambda i}{1-\lambda i}$$

und, wenn man

$$\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\lambda = \lambda'$$

nimmt,

$$w' = \frac{1+\lambda' i}{1-\lambda' i}.$$

Bemerkt man nun, dass $\lambda' = -\infty$ für $\lambda = -\infty$ und $\lambda' = +\infty$ für $\lambda = +\infty$ ist, so ergiebt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w'} F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Setzt man in dem letzten Integral $\varepsilon = 1$, so wird $\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'} = 1$, woraus man schliesst:

$$\lim_{\varepsilon=1}\int_{-\infty}^{+\infty} F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}\,d\lambda = F(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda' = 2\pi i F(x).$$

Gegen die Richtigkeit dieses Schlusses liesse sich das Bedenken erheben, dass für $w' = -1$ oder für $\lambda' = \pm\infty$ der Ausdruck $\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}$ nicht gleich 1 wird, wenn ε sich der Grenze 1 nähert, indem dann dieser Quotient für jeden Werth von ε vielmehr gleich -1 ist. Um dieses Bedenken zu beseitigen, drücke man das in Rede stehende Integral als Summe der drei nachstehenden aus:

$$\int_{-\infty}^{-\lambda_0} F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'; \quad \int_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'; \quad \int_{+\lambda_0}^{+\infty} F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Das erste derselben lässt sich, indem man $-\lambda'$ für λ' setzt, transformiren in:

$$\int_{\lambda_0}^{\infty} F\left(x\frac{1+\varepsilon w'}{\varepsilon+w'}\right)\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Die Summe des ersten und dritten Integrals giebt daher

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{1}{w'}\left\{F\left(x\frac{1+\varepsilon w'}{w'+\varepsilon}\right) + F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\right\}\frac{dw'}{d\lambda'}\,d\lambda'.$$

Da $\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'} = \frac{2i}{1+\lambda'^2}$ innerhalb der Grenzen der Integration das Zeichen nicht

ändert, so kann man diesen Ausdruck auf die Form

$$R.\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'$$

bringen, wo der absolute Betrag von R kleiner ist als der grösste absolute Betrag, den

$$F\left(x\frac{1+\varepsilon w'}{w'+\varepsilon}\right)+F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)$$

für die verschiedenen Werthe von λ', oder

$$F(xw)+F\left(\frac{x}{w}\right)$$

für die verschiedenen Werthe von λ erhält. Es ist aber

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'-\int_{0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'=\pi i-\int_{0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda',$$

mithin ist das fragliche Integral gleich

$$\int_{-\lambda_0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}F\left(x\frac{w'+\varepsilon}{1+\varepsilon w'}\right)\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'+R\left\{\pi i-\int_{0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'\right\}.$$

Die Grenze dieses Ausdrucks für den Grenzwerth $\varepsilon=1$ ist nun

$$F(x)\int_{-\lambda_0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'+R_1\left\{\pi i-\int_{0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'\right\}$$

oder

$$2\pi i F(x)-F(x)\left\{2\pi i-\int_{-\lambda_0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'\right\}+R_1\left\{\pi i-\int_{0}^{\lambda_0}\frac{1}{w'}\frac{dw'}{d\lambda'}d\lambda'\right\}.$$

Da λ_0 ganz willkürlich ist, so kann man den Werth dieser Zahl so gross annehmen, dass die beiden eingeklammerten Differenzen kleiner als jede gegebene Grösse werden, woraus erhellt, dass die gesuchte Grenze wirklich $2\pi i F(x)$ ist.

Man hat daher

$$\lim_{\varepsilon=1}\int_{-\infty}^{+\infty}F(xw)\left\{\frac{1}{w-\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon w}\right\}\frac{dw}{d\lambda}d\lambda=2\pi i F(x), \tag{6.}$$

und vermöge (5.)

$$(7.) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu = F(x)$$

für jeden Werth von x innerhalb der bezeichneten Grenzen.

Uebrigens lässt sich leicht nachweisen, dass, wenn eine Function durch eine Reihe von der Form (7.), die für alle, ihrem absoluten Betrage nach zwischen zwei Grenzen A, B liegenden Werthe von x unbedingt convergirt, dargestellt werden kann, sie die in § 1 angegebenen Bedingungen erfüllt, so dass diese nicht allein hinreichend, sondern auch nothwendig sind.

§ 4.

Wenn die Veränderliche x alle Werthe haben kann, deren absoluter Betrag eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, und wenn $F(x)$ für keinen Werth von x in der Nähe von 0 unendlich gross wird, so kann man aus dem in § 3 bewiesenen Umstande, dass der absolute Betrag von $A_{-\nu}$ kleiner als Ma^ν ist, wenn M den grössten absoluten Werth bezeichnet, den $F(aw)$ für die verschiedenen Werthe von w erhält, folgern, dass

$$A_\nu = 0$$

ist für jeden negativen Werth von ν. Denn man kann unter den gemachten Voraussetzungen a beliebig klein annehmen, während M eine bestimmte Grösse nicht überschreitet. In diesem Falle lässt sich daher $F(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_\nu x^\nu + \cdots,$$

die nur ganze positive Potenzen enthält, entwickeln.

Wenn dagegen die Veränderliche x alle Werthe erhalten kann, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze übersteigt, und wenn $F(x)$ überdies für keinen unendlich grossen Werth von x unendlich gross wird, so kann man aus dem Umstande, dass A_ν kleiner als $Nb^{-\nu}$ ist, wenn N den grössten absoluten Werth bezeichnet, den $F(bw)$ für die verschiedenen Werthe von w erhält, folgern, dass $A_\nu = 0$ ist für jeden positiven Werth von ν. Denn man kann b so gross annehmen, dass $b^{-\nu}$ kleiner wird als jede gegebene Grösse, während N eine bestimmte Grenze nicht überschreitet. Man kann daher in

diesem Falle $F(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{-\nu} x^{-\nu}$$

entwickeln, die für alle Werthe von x innerhalb der bezeichneten Grenzen absolut convergirt.

§ 5.

Setzen wir $F(x+k)$ für $F(x)$ und betrachten jetzt k als Veränderliche, so hat die Function $F(x+k)$, wenn wir die absoluten Beträge von x und k durch r und ρ bezeichnen, für alle Werthe von k, welche so beschaffen sind, dass $r+\rho$ innerhalb der Grenzen liegt, zwischen denen der absolute Betrag von x sich bewegt, diejenigen Eigenschaften, die erforderlich sind, damit sie nach Potenzen von k entwickelt werden kann. Da ferner $F(x+k)$ für keinen Werth von k in der Nähe von $k = 0$ unendlich gross wird, so kann man nach § 4 setzen

$$F(x+k) = F_0 + F_1 k + F_2 k^2 + \cdots = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F_\nu k^\nu,$$

und es ist, wenn k_0 irgend einen bestimmten Werth bezeichnet, den k erhalten kann, zufolge (4.)

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x+k_0 w)}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda. \tag{8.}$$

Man hat aber, wenn man in (7.) $x + k_0 w$ für x setzt,

$$F(x+k_0 w) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu (x+kw)^\nu,$$

mithin

$$F_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k_0 w)^\nu}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda.$$

Nimmt man, was erlaubt ist, den absoluten Betrag von k_0 kleiner als den von x, so kann man $(x+k_0 w)^\nu$ in eine convergirende Reihe

$$x^\nu + \nu_1 x^{\nu-1} k_0 w + \cdots + \nu_n x^{\nu-n} k_0^n w^n + \cdots$$

entwickeln, wo $\nu_1, \nu_2, \ldots$ die Binominalcoefficienten für den Exponenten ν bezeichnen. Multiplicirt man diese Reihe mit $\frac{1}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda$ und integrirt zwischen den Grenzen $\lambda = -\infty$ und $\lambda = +\infty$, so erhält man vermöge des in

§ 3 Erwiesenen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+k_0 w)^\nu}{k_0^n w^n} \frac{1}{w} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda = 2\pi i \nu_n x^{\nu-n},$$

und daher

$$F_n = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \nu_n A_\nu x^{\nu-n}. \tag{9.}$$

Bezeichnet man nun durch $F^{(1)}(x)$ die Abgeleitete der Function $F(x)$, d. h. den Coefficienten von k in der Entwicklung von $F(x+k)$ nach ganzen Potenzen von k, so ist

$$F^{(1)}(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \nu A_\nu x^{\nu-1}. \tag{10.}$$

Diese Reihe ist, wie aus ihrer Herleitung unmittelbar folgt, convergent für alle diejenigen Werthe von x, für welche $\sum A_\nu x^\nu$ convergirt, und daher ist $F^{(1)}(x)$ eine Function, welche für alle Werthe von x ganz denselben Charakter hat wie $F(x)$. Bezeichnet man nun durch $F^{(2)}(x)$ die Abgeleitete von $F^{(1)}(x)$, durch $F^{(3)}(x)$ die von $F^{(2)}(x)$ u. s. w., so folgt sofort, dass sämmtliche Functionen

$$F(x), \quad F^{(1)}(x), \quad F^{(2)}(x), \quad F^{(3)}(x), \quad \ldots$$

den in § 1 angegebenen Charakter haben. Nun hat man

$$\left\{\begin{array}{l} F^{(1)}(x) = \sum \nu A_\nu x^{\nu-1} \\ F^{(2)}(x) = \sum \nu(\nu-1) A_\nu x^{\nu-2} \\ F^{(3)}(x) = \sum \nu(\nu-1)(\nu-2) A_\nu x^{\nu-3} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F^{(n)}(x) = \sum \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-n+1) A_\nu x^{\nu-n} = n! \sum \nu_n A_\nu x^{\nu-n}. \end{array}\right. \tag{11.}$$

Hieraus ergiebt sich vermöge (9.)

$$F_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(x). \tag{12.}$$

Also hat man, da $F_0 = F(x)$ ist,

$$\begin{aligned} F(x+k) &= F(x) + F^{(1)}(x) \cdot \frac{k}{1!} + F^{(2)}(x) \cdot \frac{k^2}{2!} + F^{(3)}(x) \cdot \frac{k^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F^{(\nu)}(x) \cdot \frac{k^\nu}{\nu!}, \end{aligned} \tag{13.}$$

wo $F^{(0)}(x) = F(x)$ ist, für alle diejenigen Werthe von x und k, die so beschaffen sind, dass die Summe ihrer absoluten Beträge zwischen den Grenzen

enthalten ist, innerhalb welcher der absolute Betrag von x liegen muss. Ferner ergiebt sich noch aus (8.)

$$\frac{F^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x+k_0 w)}{k_0^n w^n} \frac{1}{wi} \frac{dw}{d\lambda} d\lambda, \tag{14.}$$

wo k_0 so klein angenommen werden muss, dass $x+k_0 w$ für alle Werthe von w von $\lambda = -\infty$ bis $\lambda = +\infty$ innerhalb der für x bezeichneten Grenzen liegt, mit dieser Einschränkung aber willkürlich gewählt werden kann.

Münster, 1841.

ZUR THEORIE DER POTENZREIHEN.

A. Es sei

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

eine Potenzreihe der complexen Veränderlichen x mit gegebenen Coefficienten. Ist dann r irgend eine bestimmte, innerhalb des Convergenzbezirks der Reihe liegende positive Grösse, so hat der absolute Betrag von $F(x)$, wenn man der Veränderlichen x alle diejenigen Werthe beilegt, für welche $|x| = r$ ist, eine obere Grenze, die mit g bezeichnet werde; und es gilt der Satz:

$$|A_\mu| \leqq g r^{-\mu}$$

für jeden ganzzahligen Werth von μ.

Da die betrachtete Potenzreihe für alle, der Bedingung $|x| = r$ entsprechenden Werthe von x gleichmässig convergirt, so lassen sich nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse δ zwei positive ganze Zahlen n, n' so bestimmen, dass

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=-n'+1} A_\nu x^\nu, \qquad \sum_{\nu=n+1}^{\nu=+\infty} A_\nu x^\nu$$

ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als δ, wenn $|x| = r$ ist. Dies vorausgesetzt, nehme man eine complexe Grösse ξ vom absoluten Betrage 1 so an, dass keine der Potenzen $\xi^{-1}, \ldots \xi^{-n'}, \xi, \ldots \xi^n$ den Werth 1 erhält, so hat man

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} F(r\xi^\lambda) = (l+1)A_0 + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} \sum_{\nu=1}^{\nu=n'} A_{-\nu} r^{-\nu} \xi^{-\lambda\nu} + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu r^\nu \xi^{\lambda\nu} + \sum_\lambda (\delta_\lambda + \delta'_\lambda),$$

wo die Grössen δ_λ, δ'_λ dem absoluten Betrage nach $< \delta$ sind, oder

$$\frac{1}{l+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} F(r\xi^\lambda) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=n'} A_{-\nu} r^{-\nu} \cdot \frac{1-\xi^{-(l+1)\nu}}{(l+1)(1-\xi^{-\nu})} + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} A_\nu r^\nu \cdot \frac{1-\xi^{(l+1)\nu}}{(l+1)(1-\xi^\nu)} + \varepsilon,$$

wo $\varepsilon \leqq 2\delta$ ist. Lässt man sodann die Zahl l ohne Ende wachsen, so nähern sich die Ausdrücke unter den Summenzeichen auf der rechten Seite der Gleichung der Grenze Null, während die Summe auf der linken Seite niemals $> g$ wird. Setzt man also

$$|A_0| = g + \varepsilon',$$

so ist $\varepsilon' < \varepsilon$, und es kann also A_0 dadurch, dass man den Zahlen n', n hinreichend grosse Werthe giebt, der Grösse g so nahe gebracht werden als man will, woraus sich, da der Werth von A_0 von den Zahlen n, n' unabhängig ist, unmittelbar ergiebt, dass $|A_0|$ niemals $> g$ ist.

Wendet man nun, unter μ eine beliebige ganze Zahl verstehend, diesen Satz auf die Function $F(x).x^{-\mu}$ an, so unterscheidet sich letztere von der ersteren nur dadurch, dass $gr^{-\mu}$ an die Stelle von g und A_μ an die Stelle von A_0 tritt, und es ergiebt sich also

$$|A_\mu| \leqq g r^{-\mu}.$$

B. Es sei

$$F(x_1, x_2, \ldots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} A_{\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}, \qquad (\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\varrho = -\infty \cdots +\infty)$$

wo $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ complexe Veränderliche bedeuten, während die Coefficienten A gegebene Constanten bezeichnen und so beschaffen sein sollen, dass die Reihe auch für Werthsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$, in denen jede einzelne Grösse von Null verschieden ist, convergirt. Wird dann irgend ein System positiver Grössen $r_1, r_2, \ldots r_\varrho$ so angenommen, dass die Stelle $(x_1 = r_1, x_2 = r_2, \ldots x_\varrho = r_\varrho)$ dem Innern des Convergenzbezirkes der Reihe angehört, so hat der absolute Betrag von $F(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ für diejenigen Werthsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$, in denen $|x_1| = r_1$, $|x_2| = r_2, \ldots |x_\varrho| = r_\varrho$ ist, eine obere Grenze, die mit g bezeichnet werde; und es gilt der Satz

$$|A_{\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varrho}| \leqq g r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \ldots r_\varrho^{-\mu_\varrho}$$

für jedes System ganzzahliger Werthe von $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varrho$.

Da die betrachtete Potenzreihe für die der Bedingung

$$|x_1| = r_1, \quad |x_2| = r_2, \ldots |x_\varrho| = r_\varrho$$

entsprechenden Werthsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ gleichmässig convergirt, so lässt sich aus ihr nach Annahme einer beliebigen positiven Grösse δ eine endliche

Anzahl von Gliedern so herausheben, dass die Summe aller übrigen Glieder für jedes der angegebenen Werthsysteme $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ ihrem absoluten Betrage nach $< \delta$ ist. Bezeichnet man dann die Summe der herausgehobenen Glieder mit

$$A_{0,0,\dots 0} + \overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{(\nu')} A_{\nu_1', \nu_2', \dots \nu_\varrho'} \cdot x_1^{\nu_1'} x_2^{\nu_2'} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho'},$$

so ist

$$|F(x_1, x_2, \dots x_\varrho)| + \delta > |A_{0,0,\dots 0}| + |\overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho)|,$$

und somit

$$g + \delta > |A_{0,0,\dots 0}| + |\overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho)|.$$

Nunmehr seien $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\varrho$ Grössen vom absoluten Betrage 1, deren Wahl keiner andern Beschränkung unterworfen ist, als dass in jedem Gliede von $\overline{F}(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ wenigstens eine der Grössen

$$\xi_1^{\nu_1'}, \ \xi_2^{\nu_2'}, \ \dots \ \xi_\varrho^{\nu_\varrho'}$$

von 1 verschieden sein muss.

Setzt man dann

$$r_1 \xi_1^{\lambda_1}, \ r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \ \dots \ r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho} \quad \text{für} \quad x_1, \ x_2, \ \dots \ x_\varrho,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varrho$ ganze Zahlen bedeuten, von denen jede unabhängig von den übrigen die Werthe $0, 1, \dots l$ durchlaufen soll, so hat man der Definition der Grössen g, δ gemäss für jedes System $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\varrho)$

$$|g + \delta| > |A_{0,0,\dots 0}| + |\overline{F}(r_1 \xi_1^{\lambda_1}, r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \dots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho})|,$$

also

$$|g + \delta| > |A_{0,0,\dots 0}| + |\sum_{(\lambda)} \frac{1}{(l+1)^\varrho} F(r_1 \xi_1^{\lambda_1}, r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \dots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho})|.$$

Es lässt sich aber zeigen, dass der Ausdruck

$$\sum_{(\lambda)} \frac{1}{(l+1)^\varrho} F(r_1 \xi_1^{\lambda_1}, r_2 \xi_2^{\lambda_2}, \dots r_\varrho \xi_\varrho^{\lambda_\varrho})$$

sich der Grenze Null nähert, wenn man l ohne Ende wachsen lässt.

Dies ergiebt sich unmittelbar, wenn man den vorstehenden Ausdruck in der Form

$$\sum_{(\nu')} A_{\nu_1', \nu_2', \dots \nu_\varrho'} r_1^{\nu_1'} r_2^{\nu_2'} \dots r_\varrho^{\nu_\varrho'} \left\{ \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=l} \frac{1}{l+1} (\xi_1^{\nu_1'})^{\lambda_1} \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=l} \frac{1}{l+1} (\xi_2^{\nu_2'})^{\lambda_2} \dots \sum_{\lambda_\varrho=0}^{\lambda_\varrho=l} \frac{1}{l+1} (\xi_\varrho^{\nu_\varrho'})^{\lambda_\varrho} \right\}$$

schreibt und bemerkt, dass für jede complexe Grösse ξ vom absoluten Betrage 1

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} \frac{1}{l+1}(\xi^{\nu'})^{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{1-\xi^{(l+1)\nu'}}{(l+1)(1-\xi^{\nu'})}, & \text{wenn } \xi^{\nu'} \text{ von 1 verschieden,} \\ 1 \quad , & \text{wenn } \xi^{\nu'} = 1, \end{cases}$$

und dass der Annahme nach in jedem Gliede von $\overline{F}(r_1\xi_1^{\lambda_1}, r_2\xi_2^{\lambda_2}, \ldots r_\varrho\xi_\varrho^{\lambda_\varrho})$ wenigstens eine der Grössen

$$\xi_1^{\nu_1'}, \xi_2^{\nu_2'}, \ldots \xi_\varrho^{\nu_\varrho'}$$

nicht gleich 1 ist. Man kann daher schliessen:

$$|A_{0,0,\ldots 0}| < |g+\delta| - \delta',$$

wo δ' eine beliebig klein anzunehmende Grösse bedeutet. Es kann aber die Function $\overline{F}(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ so angenommen werden, dass auch δ beliebig klein wird; es muss also

$$|A_{0,0,\ldots 0}| \leqq g$$

sein.

Lässt man sodann

$$x_1^{-\mu_1} x_2^{-\mu_2} \ldots x_\varrho^{-\mu_\varrho} . F(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$$

an die Stelle von $F(x_1, x_2, \ldots x_\varrho)$ treten, so hat man $g r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \ldots r_\varrho^{-\mu_\varrho}$ statt g zu nehmen, und es ergiebt sich

$$|A_{\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_\varrho}| \leqq g r_1^{-\mu_1} r_2^{-\mu_2} \ldots r_\varrho^{-\mu_\varrho}.$$

Aus den vorstehenden Sätzen A), B) lässt sich nun ein anderer von besonderer Wichtigkeit ableiten.

C. Es seien unendlich viele gewöhnliche Potenzreihen[1]) in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben:

$$F_0(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \quad F_1(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \quad F_2(x_1, x_2, \ldots x_\varrho), \ldots .,$$

und es werde angenommen, dass in einer bestimmten Umgebung G der Stelle $(0, 0, \ldots 0)$ [2]) nicht nur jede einzelne dieser Reihen, sondern auch deren Summe unbedingt und gleichmässig convergire.

---

1) d. h. Reihen von der Form $\sum A_{\nu_1,\nu_2,\ldots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_\varrho^{\nu_\varrho}$, in denen jeder der Exponenten eine ganze positive Zahl oder Null ist.

2) Unter Umgebung einer bestimmten Stelle $(a_1, a_2, \ldots a_\varrho)$ im Gebiete von ϱ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ ist ein Bereich von folgender Beschaffenheit zu verstehen: Wenn $(x_1', x_2', \ldots x_\varrho')$ irgend eine Stelle des Be-

Bezeichnet man dann den Coefficienten von $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho}$ in $F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ mit $A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho}$ und setzt

$$\sum_{(\mu)} A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho} = A_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho},$$

so lässt sich zeigen, dass $A_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho}$ einen endlichen Werth hat und für jedes der genannten Umgebung angehörige Werthsystem die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} A_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho}$$

besteht.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme man ϱ positive Grössen $r_1, r_2, \dots r_\varrho$ so an, dass die Stelle $(x_1 = r_1, x_2 = r_2, \dots x_\varrho = r_\varrho)$ im Innern des Bereiches G liegt.

Ist dann k irgend eine bestimmte positive Grösse, so kann eine ganze positive Zahl m so gewählt werden, dass für jedes, den Bedingungen

$$|x_1| \leqq r_1, \ |x_2| \leqq r_2, \ \dots \ |x_\varrho| \leqq r_\varrho$$

entsprechende Werthsystem $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ und für jede ganze Zahl n, die $\geqq m$, der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) < \tfrac{1}{2} k,$$

und deshalb für jede Zahl n', die $\geqq n$,

$$\left| \sum_{\mu=n}^{\mu=n'} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) \right| < k$$

ist. Man hat aber

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=n'} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} \sum_{\mu=n}^{\mu=n'} A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho},$$

und somit nach dem vorhergehenden Satze für jedes Werthsystem $(\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho)$

$$\sum_{\mu=n}^{\mu=n'} A^{(\mu)}_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_\varrho} < k r_1^{-\nu_1} r_2^{-\nu_2} \dots r_\varrho^{-\nu_\varrho}.$$

---

reiches ist, so gilt dasselbe von jeder Stelle $(x_1'', x_2'', \dots x_\varrho'')$, die den Bedingungen $|x_1'' - a_1| \leqq |x_1' - a_1|$, $|x_2'' - a_2| \leqq |x_2' - a_2|$, $\dots$ $|x_\varrho'' - a_\varrho| \leqq |x_\varrho' - a_\varrho|$ entspricht. Ein solcher Bereich ist z. B. der Convergenzbezirk jeder gewöhnlichen Potenzreihe von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$.

Demgemäss hat die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} A^{(\mu)}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho}$$

einen bestimmten endlichen Werth, der mit $A_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho}$ bezeichnet werde.

Hiernach hat man, wenn man

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} A^{(\mu)}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} = A'_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho}, \qquad \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} A^{(\mu)}_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} = A''_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho}$$

setzt und den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ nur solche Werthe beilegt, deren absolute Beträge $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\varrho < r_1, r_2, \dots r_\varrho$ sind,

$$\sum_{(\nu)} \left| A''_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right| < \sum_{(\nu)} k \left(\frac{\xi_1}{r_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\xi_2}{r_2}\right)^{\nu_2} \dots \left(\frac{\xi_\varrho}{r_\varrho}\right)^{\nu_\varrho},$$

und somit

$$\sum_{(\nu)} \left| A''_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right| < k \frac{r_1}{r_1-\xi_1} \cdot \frac{r_2}{r_2-\xi_2} \dots \frac{r_\varrho}{r_\varrho-\xi_\varrho}.$$

Die Reihe

$$\sum_{(\nu)} \left| A''_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right|$$

ist also für die jetzt betrachteten Werthsysteme $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ unbedingt convergent, und dies gilt nun, da

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{(\nu)} A'_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho},$$

auch von der Reihe

$$\sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho}.$$

Man hat ferner

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) - \sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho} \\ &= \sum_{\mu=n}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) - \sum_{(\nu)} A''_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho}, \end{aligned}$$

und somit

$$\left| \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) - \sum_{(\nu)} A_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_\varrho^{\nu_\varrho} \right| \leqq k \frac{r_1}{r_1-\xi_1} \cdot \frac{r_2}{r_2-\xi_2} \dots \frac{r_\varrho}{r_\varrho-\xi_\varrho} + \tfrac{1}{2} k.$$

Da man nun für jedes bestimmte, dem Bereiche G angehörige Werthsystem $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ zunächst $r_1, r_2, \dots r_\varrho$ der angegebenen Bedingung gemäss und dann k so annehmen kann, dass

$$k\frac{r_1}{r_1-\xi_1}\cdot\frac{r_2}{r_2-\xi_2}\cdots\frac{r_\varrho}{r_\varrho-\xi_\varrho}+\tfrac{1}{2}k$$

kleiner ist als eine beliebige gegebene Grösse, der Ausdruck auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung aber von k unabhängig ist, so folgt, dass

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho) = \sum_{(\nu)}A_{\nu_1,\nu_2,\dots\nu_\varrho}x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\dots x_\varrho^{\nu_\varrho}$$

sein muss.

Jetzt mögen

$$F_0(x_1, x_2, \dots x_\varrho), \qquad F_1(x_1, x_2, \dots x_\varrho), \qquad F_2(x_1, x_2, \dots x_\varrho), \qquad \dots .$$

irgend welche eindeutigen Functionen von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ bedeuten, welche die Bedingung erfüllen, dass für alle einem zusammenhängenden Bereiche G angehörigen Werthsysteme $(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$$

unbedingt und gleichförmig convergirt.

Nimmt man dann in G eine bestimmte Stelle $(a_1, a_2, \dots a_\varrho)$ beliebig an und setzt

$$x_1 = a_1+\xi_1, \quad x_2 = a_2+\xi_2, \quad \dots \quad x_\varrho = a_\varrho+\xi_\varrho,$$

so lässt sich jede Function $F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$ in eine gewöhnliche Potenzreihe von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\varrho$ entwickeln und im Gebiete der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\varrho$ eine Umgebung der Stelle $(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \dots \xi_\varrho = 0)$ angeben, innerhalb welcher die Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}F_\mu(a_1+\xi_1, a_2+\xi_2, \dots a_\varrho+\xi_\varrho)$$

unbedingt und gleichförmig convergirt, und somit nach dem vorstehenden Satze in eine Potenzreihe von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_\varrho$ verwandelt werden kann. Damit ist erwiesen, dass innerhalb des Bereiches G die Summe

$$\sum_\mu F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\varrho)$$

eine eindeutige analytische Function von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ ist. Ferner ergiebt sich,

dass diese Function Derivirte jeder Ordnung besitzt und dass (für $\lambda = 1, 2, \dots \rho$)

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho),$$

und allgemein

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\rho}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_\rho^{\alpha_\rho}} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\rho}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_\rho^{\alpha_\rho}} F_\mu(x_1, x_2, \dots x_\rho)$$

ist.

Münster, im Herbst 1841.

DEFINITION ANALYTISCHER FUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN VERMITTELST ALGEBRAISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Auszug aus einer im Jahre 1842 verfassten, bisher nicht veröffentlichten Abhandlung.)

1.

Es sei vorgelegt das folgende System von n Differentialgleichungen, in denen $x_1, \dots x_n$ zu bestimmende Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t und

$$G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$$

gegebene ganze rationale Functionen von $x_1, \dots x_n$ bedeuten sollen:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} - G_1(x_1, \dots x_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{dx_n}{dt} - G_n(x_1, \dots x_n) = 0. \end{cases}$$

Dann lassen sich zunächst n in einer gewissen Umgebung der Stelle $(t = 0)$ convergirende (gewöhnliche) Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$$

herstellen, welche für $x_1, \dots x_n$ gesetzt den vorstehenden Differentialgleichungen genügen und zugleich für $t = 0$ beliebig vorgeschriebene Werthe

$$a_1, \dots a_n$$

annehmen.

Sind nämlich $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ irgend n Potenzreihen, welche unter der Bedingung, dass der absolute Betrag von t unter einer gewissen Grenze (r) liege,

sämmtlich convergiren, und setzt man

$$x_\lambda = \mathfrak{P}_\lambda(t), \qquad (\lambda = 1, \dots n) \tag{2.}$$

so lassen sich die Ausdrücke

$$\frac{dx_\lambda}{dt} - G_\lambda(x_1, \dots x_n) \qquad (\lambda = 1, \dots n) \tag{3.}$$

nach Potenzen von t in Reihen entwickeln, die ebenfalls convergiren, wenn

$$|t| < r$$

ist. Bezeichnet man den Coefficienten von t^μ in $\mathfrak{P}_\lambda(t)$ mit $a_{\lambda,\mu}$ $(\mu = 0, 1, \cdots +\infty)$, so hat der Coefficient von t^μ in der Entwicklung von

$$\frac{dx_\lambda}{dt} - G_\lambda(x_1, \dots x_n)$$

die Form

$$(\mu+1)\, a_{\lambda,\mu+1} - \overline{G}_{\lambda,\mu} \left\{ \begin{matrix} a_{1,0}, \dots a_{n,0} \\ a_{1,1}, \dots a_{n,1} \\ \dots\dots \\ a_{1,\mu}, \dots a_{n,\mu} \end{matrix} \right\}, \tag{4.}$$

wo $\overline{G}_{\lambda,\mu}$ eine ganze rationale Function der Grössen

$$\begin{matrix} a_{1,0}, \dots a_{n,0} \\ a_{1,1}, \dots a_{n,1} \\ \dots\dots \\ a_{1,\mu}, \dots a_{n,\mu} \end{matrix}$$

bezeichnet. Nimmt man nun

$$a_{1,0} = a_1, \quad \dots \quad a_{n,0} = a_n \tag{5.}$$

und bestimmt darauf die übrigen Coefficienten $a_{\lambda,\mu}$ nach einander mittelst der Formeln

$$\left\{ \begin{matrix} a_{1,1} = \overline{G}_{1,0}, & \dots & a_{n,1} = \overline{G}_{n,0} \\ a_{1,2} = \frac{1}{2}\overline{G}_{1,1}, & \dots & a_{n,2} = \frac{1}{2}\overline{G}_{n,1} \\ a_{1,3} = \frac{1}{3}\overline{G}_{1,2}, & \dots & a_{n,3} = \frac{1}{3}\overline{G}_{n,2} \\ \text{u. s. w.,} \end{matrix} \right. \tag{6.}$$

so werden, wenn man

$$x_1 = \mathfrak{P}_1(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{1,\mu} t^\mu, \quad \dots \quad x_n = \mathfrak{P}_n(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n,\mu} t^\mu \tag{7.}$$

setzt, die Gleichungen (1.) für jeden dem gemeinsamen Convergenzbezirk dieser

Reihen angehörigen Werth von t befriedigt, und es erhalten zugleich $x_1, x_2, \dots x_n$ für $t = 0$ die vorgeschriebenen Werthe $a_1, a_2, \dots a_n$.

Es bleibt daher, um den im Vorstehenden ausgesprochenen Satz zu begründen, nur noch zu beweisen, dass die auf die angegebene Weise bestimmten Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ stets einen gemeinsamen Convergenzbezirk, dessen Radius nicht gleich Null ist, besitzen. Zunächst möge aber noch eine zweite Bestimmungsweise der Grössen $a_{\lambda,\mu}$ angegeben werden.

Man setze, unter ν irgend eine bestimmte positive ganze Zahl verstehend,

$$\bar{x}_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{\lambda,\mu} t^\mu, \tag{8.}$$

$$x_\lambda = \bar{x}_\lambda + \xi_\lambda, \qquad (\lambda = 1, \dots n) \tag{9.}$$

so bezeichnet ξ_λ eine Potenzreihe von t, in der das Anfangsglied vom Grade $\nu+1$ ist. Man hat also

$$G_\lambda(x_1, \dots x_n) = G_\lambda(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) + t^{\nu+1}\mathfrak{P}'_\lambda(t),$$

$$\frac{dx_\lambda}{dt} = \frac{d\bar{x}_\lambda}{dt} + t^\nu \mathfrak{P}''_\lambda(t),$$

$$\frac{d\bar{x}_\lambda}{dt} - G_\lambda(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = t^\nu \overline{\mathfrak{P}}_\lambda(t). \tag{10.}$$

Hieraus lässt sich nun folgern: Man setze (für $\lambda = 1, \dots n$, $\mathfrak{n} = 1, \dots \nu$)

$$\left\{\begin{aligned}
G_\lambda^{(0)}(x_1, \dots x_n) &= G_\lambda(x_1, \dots x_n), \\
G_\lambda^{(1)}(x_1, \dots x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_\lambda^{(0)}(x_1, \dots x_n)\, G_k(x_1, \dots x_n), \\
G_\lambda^{(2)}(x_1, \dots x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_\lambda^{(1)}(x_1, \dots x_n)\, G_k(x_1, \dots x_n), \\
G_\lambda^{(3)}(x_1, \dots x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_\lambda^{(2)}(x_1, \dots x_n)\, G_k(x_1, \dots x_n), \\
&\text{u. s. w.,}
\end{aligned}\right. \tag{11.}$$

so hat man

$$\frac{d^{\mathfrak{n}}\bar{x}_\lambda}{dt^{\mathfrak{n}}} - G_\lambda^{(\mathfrak{n}-1)}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = t^{\nu-\mathfrak{n}+1}\mathfrak{P}_{\lambda,\mathfrak{n}}(t) \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, \dots n \\ \mathfrak{n} = 1, \dots \nu\end{pmatrix}. \tag{12.}$$

Angenommen nämlich, es sei die Richtigkeit dieser Gleichung für $\lambda = 1, \dots n$ und einen bestimmten Werth von $\mathfrak{n}$, der $< \nu$, erwiesen, wie dies nach dem Obigen für $\mathfrak{n} = 1$ der Fall ist, so folgt aus ihr

$$\frac{d^{n+1}\bar{x}_\lambda}{dt^{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_k} G_\lambda^{(n-1)}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) \frac{d\bar{x}_k}{dt} = t^{\nu-n} \overline{\mathfrak{P}}_{\lambda,n}(t), \qquad (\lambda = 1, \dots n)$$

und hieraus, da — nach (10.) —

$$\frac{d\bar{x}_k}{dt} = G_k(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) + t^\nu \overline{\mathfrak{P}}_k(t)$$

ist,

$$\frac{d^{n+1}\bar{x}_\lambda}{dt^{n+1}} - G_\lambda^{(n)}(\bar{x}_1, \dots \bar{x}_n) = t^{\nu-n} \mathfrak{P}_{\lambda,\nu}(t),$$

woraus sich das Behauptete unmittelbar ergiebt.

Setzt man nun in (12.) $n = \nu$ und dann $t = 0$, so kommt:

$$\nu!\, a_{\lambda,\nu} = G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \infty \end{pmatrix}. \tag{13.}$$

Aus den Formeln (11.) geht nun hervor, dass jeder der Ausdrücke $G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)$ eine ganze Function nicht nur der Grössen $a_1, \dots a_n$, sondern auch der Coefficienten von $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$ ist, und dass in denselben jedes Glied eine positive Vorzahl hat. Es lässt sich deshalb für den absoluten Betrag von $G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)$ eine Grenze, die er nicht überschreiten kann, folgendermassen bestimmen.

Man nehme an Stelle der ganzen Functionen $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$ n andere

$$\mathfrak{G}_1(x_1, \dots x_n), \dots \mathfrak{G}_n(x_1, \dots x_n)$$

so an, dass (für $\lambda = 1, \dots n$) jeder Coefficient von $\mathfrak{G}_\lambda(x_1, \dots x_n)$ positiv und nicht kleiner als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten von $G_\lambda(x_1, \dots x_n)$ ist. Ferner seien $\alpha_1, \dots \alpha_n$ positive Grössen, welche der Bedingung

$$\alpha_1 \geqq |a_1|, \dots \alpha_n \geqq |a_n|$$

entsprechend gewählt werden müssen. Wenn man dann unter

$$\mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n)$$

den Ausdruck versteht, der aus den Functionen $\mathfrak{G}_1(x_1, \dots x_n), \dots \mathfrak{G}_n(x_1, \dots x_n)$ ebenso abgeleitet ist wie $G_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n)$ nach Vorschrift der Formeln (11.) aus den Functionen $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$, so hat man

$$|G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)| \leqq \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \infty \end{pmatrix}. \tag{14.}$$

Wenn also die Reihe

$$\alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n)\, \tau^\nu$$

für einen bestimmten positiven Werth von τ convergirt, so ist dies sicher auch der Fall mit der Reihe

$$a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)\, t^\nu$$

für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag nicht grösser als τ ist.

Ein Functionensystem $\mathfrak{G}_1(x_1, \dots x_n), \dots \mathfrak{G}_n(x_1, \dots x_n)$ von der verlangten Beschaffenheit findet man z. B. folgendermassen. Man bestimme eine positive Constante g und eine ganze positive Zahl m so, dass in der nach Potenzen von $x_1, \dots x_n$ ausgeführten Entwicklung des Ausdrucks

$$\mathfrak{G}(x_1, \dots x_n) = g(1 + x_1 + \cdots + x_n)^m$$

der Coefficient jedes Gliedes nicht kleiner ist als der grösste Werth, den in den entsprechenden Gliedern der Functionen $G_1(x_1, \dots x_n), \dots G_n(x_1, \dots x_n)$ die absoluten Beträge der Coefficienten erreichen, und setze fest, dass für jeden Werth von λ

$$\mathfrak{G}_\lambda(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{G}(x_1, \dots x_n)$$

sein solle. Mittelst der Formeln (11.) ergiebt sich dann, wenn man

$$x = x_1 + \cdots + x_n$$

setzt,

$$\text{(15.)} \qquad \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n) = n^{\nu-1} g^\nu (1, + (m-1))^\nu (1+x)^{\nu(m-1)+1} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \infty \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung gilt zunächst für $\nu = 1$. Angenommen, sie sei für irgend einen bestimmten Werth von ν bewiesen, so ergiebt sich aus (11.)

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu)}(x_1, \dots x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(x_1, \dots x_n)}{\partial x_k} \mathfrak{G}_k(x_1, \dots x_n) \\ &= n n^{\nu-1} g^\nu \frac{d}{dx} \left\{ (1, + (m-1))^\nu (1+x)^{\nu(m-1)+1} \right\} \cdot g(1+x)^m \\ &= n^\nu g^{\nu+1} (1, + (m-1))^\nu (1 + \nu(m-1)) (1+x)^{(\nu+1)(m-1)+1} \\ &= n^\nu g^{\nu+1} (1, + (m-1))^{\nu+1} (1+x)^{(\nu+1)(m-1)+1}. \end{aligned}$$

Es besteht also die Gleichung (15.) auch noch, wenn man die Zahl ν um eine Einheit vermehrt; sie ist demnach allgemein gültig.

Dies festgestellt, nehme man nun n positive Grössen $\alpha_1, \dots \alpha_n$ so an, wie im Vorstehenden angegeben worden, und setze

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$c_\nu = \frac{n^{\nu-1} g^\nu}{\nu!} (1, + (m-1))^\nu (1+\alpha)^{\nu(m-1)+1},$$

so hat man

$$\alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n) \frac{\tau^\nu}{\nu!} = \alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \tau^\nu.$$

Es ist aber

$$\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = \frac{ng}{\nu+1} (1 + \nu(m-1)) (1+\alpha)^{m-1},$$

und somit

$$\operatorname{Lim}_{\nu=\infty} \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} = ng(m-1)(1+\alpha)^{m-1}.$$

Setzt man also

$$\bar{\tau} = \frac{(1+\alpha)^{-m+1}}{ng(m-1)},$$

so convergirt die Reihe

$$\alpha_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{G}_\lambda^{(\nu-1)}(\alpha_1, \dots \alpha_n) \frac{\tau^\nu}{\nu!},$$

wenn $\tau < \bar{\tau}$, und somit die Reihe

$$\mathfrak{P}_\lambda(t) = a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n) t^\nu$$

sicher für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag kleiner als $\bar{\tau}$ ist.

Hiermit ist bewiesen, dass die Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ stets einen gemeinsamen Convergenzbezirk, dessen Radius nicht gleich Null ist, besitzen und somit, wenn die Veränderliche t auf diesen Bezirk beschränkt wird, eindeutige und continuirliche Functionen von t darstellen, welche für $x_1, \dots x_n$ gesetzt den vorgelegten Differentialgleichungen genügen und für $t = 0$ die vorgeschriebenen Werthe $a_1, \dots a_n$ annehmen.

Es erhellt ferner aus der im Vorstehenden angegebenen Bestimmungsweise der Coefficienten von $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$, dass es nur ein System so beschaffener Potenzreihen giebt.

2.

Aus dem vorstehenden Beweise für die Convergenz der Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \dots \mathfrak{P}_n(t)$ lässt sich ein wichtiger Satz herleiten.

Es mögen jetzt die Coefficienten der in den Differentialgleichungen (1.) vorkommenden Functionen $G_1(x_1, \ldots x_n), \ldots G_n(x_1, \ldots x_n)$, und ebenso die mit $a_1, \ldots a_n$ bezeichneten Anfangswerthe der zu bestimmenden Grössen $x_1, \ldots x_n$ eindeutige analytische Functionen beliebig vieler, einem zusammenhängenden Bereiche angehörigen unabhängigen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots$ sein, und es werde angenommen, dass innerhalb dieses Bereiches die absoluten Beträge der genannten Coefficienten, sowie auch der Grössen $a_1, \ldots a_n$, sämmtlich unter einer endlichen Grenze liegen.

Nach dem Vorhergehenden lässt sich nun eine positive Grösse r so annehmen, dass jede der Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \ldots \mathfrak{P}_n(t)$ für jedes der betrachteten Werthsysteme $u_1, u_2, \ldots$ unbedingt convergirt, wenn festgesetzt wird, dass der absolute Betrag von t kleiner als r sein solle. Versteht man dann unter r_1 irgend eine zweite positive Grösse, die kleiner als r ist, und bestimmt, dass der Veränderlichen t nur solche Werthe beigelegt werden sollen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner oder eben so gross als r_1 sind, so giebt es für die absoluten Beträge der Werthe, welche alsdann die Functionen $\mathfrak{P}_1(t), \ldots \mathfrak{P}_n(t)$ annehmen können, eine obere Grenze, die mit R bezeichnet werden möge. Nach einem bekannten Satze ist dann, wenn der Coefficient von t^ν in $\mathfrak{P}_\lambda(t)$ mit

$$\varphi_{\lambda,\nu}(u_1, u_2, \ldots)$$

bezeichnet wird,

$$|\varphi_{\lambda,\nu}(u_1, u_2, \ldots) t^\nu| \leqq R \cdot \left|\frac{t}{r}\right|^\nu.$$

Hebt man also aus der Reihe $\mathfrak{P}_\lambda(t)$ die m ersten Glieder heraus, so ist die Summe der übrig bleibenden ihrem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} R \cdot \left|\frac{t}{r}\right|^\nu = \frac{R \cdot \left|\frac{t}{r}\right|^m}{1 - \left|\frac{t}{r}\right|},$$

kann also durch Vergrösserung von m so klein gemacht werden, wie man will. Die Reihen $\mathfrak{P}_1(t), \ldots \mathfrak{P}_n(t)$ convergiren somit für die den angegebenen Bedingungen entsprechenden Werthsysteme der Veränderlichen $t, u_1, u_2, \ldots$ nicht nur unbedingt, sondern auch gleichförmig, und bilden also ein System eindeutiger analytischer Functionen dieser Veränderlichen. (Vgl. die Abhandlung »Zur Theorie der Potenzreihen«.)

3.

Man setze, unter t_0 eine von t unabhängige Grösse verstehend,

$$(1.) \qquad \mathfrak{P}_\lambda(t-t_0, a_1, \dots a_n) = a_\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n) \cdot \frac{(t-t_0)^\nu}{\nu!}, \qquad (\lambda = 1, \dots n)$$

wo $G_\lambda^{(\nu-1)}(a_1, \dots a_n)$ dieselbe Bedeutung haben soll, wie in § 1.

Dann wird, wenn man die Grössen $t_0, a_1, \dots a_n$ fixirt, durch die Gleichungen

$$(2.) \qquad x_1 = \mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \dots a_n), \quad \dots \quad x_n = \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \dots a_n)$$

ein bestimmter Complex regulärer Functionen von t definirt, welche den vorgelegten Differentialgleichungen genügen und für $t = t_0$ die Werthe $a_1, \dots a_n$ annehmen. Zugleich ergiebt sich aus dem am Schlusse des § 1 Bemerkten, dass es nur einen Complex so beschaffener und in der angegebenen Form darstellbarer Functionen giebt. Selbstverständlich wird hierbei vorausgesetzt, dass die Veränderliche t auf den gemeinsamen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(t-t_0, a_1, \dots a_n)$ beschränkt werde.

Innerhalb dieses Bereichs, der mit T_0 bezeichnet werden möge, nehme man nun einen zweiten bestimmten Werth (t_1) von t beliebig an, so hat man unter der Bedingung, dass die Veränderliche t auf eine ganz in T_0 enthaltene Umgebung der Stelle t_1 beschränkt werde,

$$(3.) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \dots a_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{1,\nu}(t-t_1)^\nu, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \dots a_n) = \sum_{\nu=1}^{\infty} P_{n,\nu}(t-t_1)^\nu, \end{cases}$$

wo

$$P_{\lambda,\nu} = \left[\frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \mathfrak{P}_\lambda(t-t_0, a_1, \dots a_n)\right]_{t=t_1} \qquad (\lambda = 1, \dots n).$$

Die Potenzreihen auf der Rechten dieser Gleichungen genügen den gegebenen Differentialgleichungen, müssen also nach dem Vorstehenden, wenn man die Werthe, die sie für $t = t_1$ annehmen, mit $a_1', \dots a_n'$ bezeichnet, identisch sein mit den Reihen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_1, a_1', \dots a_n'), \quad \dots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1', \dots a_n').$$

So ergeben sich die Gleichungen

$$(4.)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \ldots a_n) = \mathfrak{P}_1(t-t_1, a_1', \ldots a_n'), \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \ldots a_n) = \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1', \ldots a_n'), \end{array}\right.$$

in denen

$$(5.)\qquad a_1' = \mathfrak{P}_1(t_1-t_0, a_1, \ldots a_n), \quad \ldots \quad a_n' = \mathfrak{P}_n(t_1-t_0, a_1, \ldots a_n).$$

Möglicherweise erstreckt sich aber der gemeinsame Convergenzbezirk der Reihen auf der Rechten der Gleichungen (3.), der mit T_1 bezeichnet werde, über die im Vorstehenden bezeichnete Umgebung der Stelle t_1 hinaus, und es gelten dann, da die gemeinsamen Stellen der Bereiche T_0, T_1 ein Continuum bilden, die Gleichungen (4.) für jeden diesem Continuum angehörigen Werth von t.

Nun können drei Fälle eintreten.

Der Bereich T_0 kann unbegrenzt sein. Dann gilt dasselbe auch von dem Bereiche T_1, wie man auch die Stelle t_1 annehmen möge, und es bestehen die Gleichungen (4.) für jeden Werth von t, so dass es also nur einen Complex analytischer Functionen $x_1, \ldots x_n$ giebt, welche den vorgelegten Differentialgleichungen genügen und für $t = t_0$ die Werthe $a_1, \ldots a_n$ haben.

Ist aber der Bereich T_0 ein beschränkter, also geometrisch darstellbar durch das Innere eines um den Punkt t_0 beschriebenen Kreises, dessen Radius mit ρ_0 bezeichnet werde, so ist auch der Bereich T_1 ein beschränkter und wird repräsentirt durch das Innere eines um t_1 beschriebenen Kreises, dessen Radius (ρ_1), wenn man $|t_1-t_0| = \delta$ setzt, in dem Intervall

$$\rho_0-\delta \ldots \rho_0+\delta$$

liegt, woraus folgt, dass die Grösse ρ_1 sich stetig ändert, wenn der Punkt t_1 innerhalb T_0 seine Lage stetig ändert, niemals aber den Werth Null erreichen kann. Wohl aber giebt es stets in der Begrenzung von T_0 mindestens eine Stelle, welcher der Punkt t_1 nicht unendlich nahe kommen kann, ohne dass ρ_1 unendlich klein wird. Im Allgemeinen giebt es aber in der genannten Begrenzung Strecken, welche keine solche singuläre Stelle enthalten, und dann kann man t_1 so annehmen, dass $\rho_1 > \rho_0-\delta$ wird. In diesem Falle zerfällt der Bereich T_1 dergestalt in zwei zusammenhängende Theile, dass in

dem einen, der ganz in T_0 liegt, das Functionensystem

$$\mathfrak{P}_1(t-t_1, a_1', \ldots a_n'), \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1', \ldots a_n')$$

identisch ist mit dem ursprünglichen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \ldots a_n), \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \ldots a_n),$$

während es für die dem anderen, ausserhalb T_0 liegenden, Theile angehörigen Werthe von t eine Fortsetzung des letztgenannten bildet.

Es kann endlich vorkommen, dass die Grösse ρ_1 für jeden der Begrenzung von T_0 unendlich nahe kommenden Punkt t_1 einen unendlich kleinen Werth erhält. Dann liegt, wie man auch den Punkt t_1 annehmen möge, niemals ein Theil des Bereiches T_1 ausserhalb T_0, und es sind die Functionen

$$\mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \ldots a_n), \quad \ldots \quad \mathfrak{P}_n(t-t_0, a_1, \ldots a_n)$$

wenigstens nicht alle einer Fortsetzung über T_0 hinaus fähig.

Dies festgestellt, kann man nun auf mannigfaltige Weise eine Reihe von beliebig vielen Complexen

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{P}_1(t-t_0, a_1, \ldots a_n), & \ldots & \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1, \ldots a_n) \\ \mathfrak{P}_1(t-t_1, a_1', \ldots a_n'), & \ldots & \mathfrak{P}_n(t-t_1, a_1', \ldots a_n') \\ \mathfrak{P}_1(t-t_2, a_1'', \ldots a_n''), & \ldots & \mathfrak{P}_n(t-t_2, a_1'', \ldots a_n'') \end{array}$$

u. s. w.

in der Art herstellen, dass jeder derselben, von dem zweiten an, aus dem unmittelbar vorhergehenden eben so entsteht, wie nach dem obigen der zweite aus dem ersten. Durch die Gesammtheit dieser Complexe wird dann ein (eindeutiges oder mehrdeutiges) System analytischer Functionen der Veränderlichen t definirt.

Münster, im Frühjahr 1842.

ANMERKUNG.

Zur Zeit, als ich die vorstehende Abhandlung schrieb, war der in § 1 begründete Satz bereits von Cauchy gefunden und veröffentlicht worden, wovon ich indess keine Kenntniss hatte. Bei der gegenwärtigen Herausgabe meiner Abhandlung, deren Inhalt ich bisher nur bei meinen functionentheoretischen Vorlesungen benutzt habe, konnte ich mich jedoch, was den genannten Paragraphen angeht, nicht an Cauchy's Darstellung anschliessen, weil ich dann § 2 und § 3, welche wichtige, bei Cauchy nicht vorkommende Sätze enthalten, hätte vollständig umarbeiten müssen, und überdies mein Beweis des in § 1 enthaltenen Haupttheorems von dem Cauchy'schen abweicht.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE ANALYTISCHEN FACULTÄTEN.

(Beilage zum Jahresbericht über das Progymnasium zu Dt. Crone für das Schuljahr 1842—1843.)

§ 1.

Die analytischen Facultäten sind, nach Vandermonde und Kramp, in neuerer Zeit vorzüglich von Crelle*) nach eigenthümlicher Methode bearbeitet worden. Crelle definirt die analytische Facultät als eine von drei Argumenten, der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y abhängige und durch $(u,+x)^y$ bezeichnete Function, deren Grundeigenschaften in den Gleichungen

$$(1.) \qquad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^k$$

$$(2.) \qquad (ku,+kx)^y = k^y (u,+x)^y$$

$$(3.) \qquad (u,+x)^1 = u$$

ausgesprochen werden. Aus diesen Gleichungen werden alle übrigen Eigenschaften der Facultät, so wie auch Formeln zur Berechnung ihrer Werthe für beliebige Werthe von u, x, y auf einfache Weise abgeleitet.

Diese Behandlungsart der Facultäten hat vielfach Beifall gefunden, wie denn namentlich Grunert in dem Artikel »Facultät« der Supplemente zu dem Klügel'schen Wörterbuche ihr ganz folgt. Gegen sie aber finden sich in den Schriften Ohm's einige gelegentliche Aeusserungen, welche ich, obwohl sie grösstentheils aus Missverständnissen hervorgegangen zu sein scheinen, hier

*) Theorie der analytischen Facultäten, 1824.

Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques, 1831. (Ursprünglich im 7ten Bande des Journals für Mathematik erschienen.) Diese Abhandlung wird im Folgenden durch Th. d. f. bezeichnet.

anzuführen nicht umhin kann, weil sie mir Veranlassung zu einer genaueren Untersuchung der bisherigen Facultäten-Theorien gegeben haben, als deren Ergebniss ich allerdings die Ueberzeugung aussprechen muss, dass sich auch in der Crelle'schen Darstellung, wenn auch nicht in dem Sinne Ohm's, noch einige Schwierigkeiten finden, die aufgehellt und beseitigt werden müssen.

Ohm stellt (System der Mathematik, Thl. 2, § 340) für Facultäten, deren Exponenten ganze Zahlen sind, fünf Gleichungen auf, von denen die erste mit Anwendung der Crelle'schen Bezeichnungsweise

$$(4.) \qquad (u, +x)^y = (u + yx - x, -x)^y$$

heisst, die zweite und die fünfte mit den obigen Gleichungen (1.), (2.) übereinkommen, die dritte und die vierte aber aus der zweiten folgen, und fügt dann folgende Note hinzu:

»Es ist nicht möglich, einen Begriff der gebrochenen Factorielle (Facultät) hinzustellen, wofür alle fünf Nummern des § 340 noch geltend bleiben. Und namentlich ist der Begriff der gebrochenen Factoriellen, wie solche in den Anwendungen von Vandermonde und Kramp gebraucht werden, von der Art, dass für diese gebrochenen Factoriellen nur die Formeln Nr. 1 u. 2 [d. h. der hiesigen (1), (4)], also natürlich auch die mit Nr. 2 [hier (1)] zugleich gegebenen Nr. 3 und 4 des § 340 noch stattfinden, nicht aber die Formel Nr. 5 [hier (2)]. Wenn daher zuerst von Kramp stillschweigend, dann von Crelle ausdrücklich die allgemeine Factorielle als ein Ding bezeichnet wird, welches die in den Nrn. 1, 2, 5 des § 340 [in den Gleichungen (1), (2), (4)] ausgesprochenen Eigenschaften hat, so rächt sich dies unlogische Verfahren sogleich dadurch, dass bei Kramp (Réfractions astronomiques et terrestres, 1799) sehr bedeutende, von ihm selbst zugestandene und ihm unbegreifliche Widersprüche hervorgehen, während bei Crelle (»Theorie der analytischen Facultäten, 1824«) die wenigsten Formeln wahr sind, ohne dass solches von dem Verfasser bemerkt wird, weil sich derselbe nicht, wie Kramp gethan, auf specielle Untersuchungen einlässt, sondern nur allgemeine Formeln auf allgemeine Formeln gehäuft hat, welche daher als solche grösstentheils für todtgeborene gehalten werden müssen u. s. w.«

In ähnlichem Sinne spricht sich Ohm noch an anderen Stellen aus, namentlich in seiner analytischen Geometrie in einer Anmerkung, in der es

heisst, dass die Definition der Facultät, wie sie Crelle gegeben, ihm selbst unbewusst einen Widerspruch aufgenommen habe.

Diese Einwendungen Ohm's, so weit sie die Crelle'sche Theorie betreffen, lassen sich jedoch leicht beseitigen. Denn die obige Gleichung (4.), welche für gebrochene Werthe von y mit den übrigen (1.), (2.), (3.) allerdings nicht vereinbar ist, wird von Crelle keineswegs, wie Ohm es aussagt, zur Definition der Facultät mit benutzt. Dass es aber eine Function giebt, welche den Gleichungen (1.), (2.), (3.) genügt, ist nicht schwer nachzuweisen.

Denn setzt man mit Gauss*)

$$(5.) \qquad \Pi(u) = \frac{1}{u+1}\cdot\frac{2^u}{1^u}\,\frac{2}{u+2}\cdot\frac{3^u}{2^u}\,\frac{3}{u+3}\cdots\cdots\frac{n^u}{(n-1)^u}\,\frac{n}{u+n}\cdots,$$

so ist

$$(6.) \qquad (u,+x)^y = x^y\frac{\Pi\left(\frac{u}{x}-1+y\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}$$

eine Function, welche die in den genannten Gleichungen ausgedrückten Eigenschaften hat. (S. den folgenden §.)

Grösseres Gewicht aber hat eine andere Angabe Ohm's. Nachdem er (Syst. d. Mathem., Thl. 2, S. 89) den sogenannten binomischen Lehrsatz für ganze Facultäten, nämlich die Formel

$$(7.) \quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y + y_1(u,+x)^{y-1}(k,+x)^1 + y_2(u,+x)^{y-2}(k,+x)^2 + \cdots\cdots$$

bewiesen hat, fügt er hinzu, man würde sich sehr irren, wenn man mit Kramp, Crelle und so vielen Anderen annehmen wollte, dass dieser binomische Lehrsatz für Facultäten auch dann noch gelten müsse, wenn y eine gebrochene Zahl, oder gar, wenn y allgemein sei. Im Gegentheil finde man, dass, wenn y eine ganze oder gebrochene Zahl sei, und wenn im letzteren Falle die Reihe convergire, dann

$$(8.) \quad (u,+1)^y + y_1(u,+1)^{y-1}(k,+1)^1 + y_2(u,+1)^{y-2}(k,+1)^2 + \cdots = \frac{\sin u\pi\,.\sin(u+k+y)\pi}{\sin(u+y)\pi\,.\sin(k+y)\pi}\cdot(u+k,+1)^y$$

sein müsse.

---

*) Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots\cdots$ Comment. recent. Soc. Gotting., Vol. II.

Dieses Resultat fand ich bei näherer Prüfung vollkommen bestätigt, aber, was nach den angeführten Äusserungen Ohm's, wonach derselbe unter einer Facultät etwas ganz anderes zu verstehen scheint als Crelle, auffallen musste, grade unter der Voraussetzung, dass man für den Ausdruck der Facultät $(u,+1)^y$ die Formel $1^y \cdot \frac{\Pi(u+y-1)}{\Pi(u-1)}$ nehme, welche der Crelle'schen Definition entspricht.

Somit erschien mir die Facultäten-Theorie Crelle's gegen die Behauptung Ohm's, dass schon in den Grundgleichungen derselben ein Widerspruch liege, völlig gerechtfertigt, und nur insofern einer Berichtigung bedürftig, als an die Stelle der Formel (7.) die Gleichung (8.) treten musste. Aber bei weiterer Untersuchung überzeugte ich mich gleichwohl, dass sie, auch nach der neuen Bearbeitung, die sie in dem angeführten Mémoire erfahren, noch an verschiedenen anderen, wie es mir scheint, nicht unwesentlichen Mängeln leide. Von dem hochverehrten Verfasser der eben genannten Schrift, dem ich mündlich meine Bemerkungen mittheilte, zur Veröffentlichung derselben aufgefordert, glaube ich die gegenwärtige Gelegenheit dazu benutzen zu dürfen.

§ 2.

Die Definition der Facultät durch die drei Gleichungen (1.), (2.), (3.) ist nach dem Vorhergehenden in so weit zulässig, als sie mit einander nicht im Widerspruche stehen. Aber es lässt sich zeigen, dass sie allein zur Bestimmung der Facultät gar nicht hinreichen, sondern dass es vielmehr unendlich viele, ganz von einander verschiedene Functionen giebt, welche die in ihnen ausgesprochenen Eigenschaften besitzen. Aus den Gleichungen (1.), (2.) ergiebt sich nämlich (Th. d. f., 55.)

$$(9.) \qquad (u,+x)^y = x^y \frac{(1,+1)^{\frac{u}{x}+y-1}}{(1,+1)^{\frac{u}{x}-1}},$$

oder wenn man $(1,+1)^y$ durch $\mathrm{F}(y)$ bezeichnet,

$$(10.) \qquad (u,+x)^y = x^y \frac{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\mathrm{F}\left(\frac{u}{x}-1\right)}.$$

Aber in dieser Formel kann, wenn $(u,+x)^y$ zunächst nur in so weit bestimmt

werden soll, dass den Gleichungen (1.), (2.) genügt werde, die Function F ganz willkürlich angenommen werden. Denn welche Form man ihr auch geben mag, man hat

$$(11.)\quad (u,+x)^{y+k} = x^{y+k}\frac{F\left(\frac{u}{x}+y+k-1\right)}{F\left(\frac{u}{x}-1\right)} = x^y\frac{F\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{F\left(\frac{u}{x}-1\right)}\cdot x^k\frac{F\left(\frac{u+yx}{x}+k-1\right)}{F\left(\frac{u+yx}{x}-1\right)} = (u,+x)^y(u+yx,+x)\,,$$

und

$$(12.)\quad (ku,+kx)^y = (kx)^y\frac{F\left(\frac{ku}{kx}+y-1\right)}{F\left(\frac{ku}{kx}-1\right)} = k^y x^y\frac{F\left(\frac{u}{x}+y+1\right)}{F\left(\frac{u}{x}-1\right)} = k^y(u,+x)^y.$$

Damit nun ferner auch der Bedingung (3.) Genüge geschehe, hat man in (10.) $y = 1$ zu setzen, wodurch man findet, dass

$$(13.)\quad u = x\frac{F\left(\frac{u}{x}\right)}{F\left(\frac{u}{x}-1\right)},$$

oder wenn man y für $\frac{u}{x}$ schreibt,

$$(14.)\quad F(y) = yF(y-1)$$

sein muss. Eine Function, welche diese Eigenschaft besitzt, ist $\Pi(y)$. Wird nun, um die allgemeinste Form von F zu bestimmen,

$$(15.)\quad F(y) = \psi(y)\Pi(y)$$

gesetzt, so findet sich

$$(16.)\quad \psi(y)\Pi(y) = \psi(y-1).y\Pi(y-1),$$

woraus, weil

$$(17.)\quad \Pi(y) = y\Pi(y-1),$$

$$(18.)\quad \psi(y) = \psi(y-1)$$

folgt, d. h. die Function $\psi(y)$ oder $\frac{F(y)}{\Pi(y)}$ muss für jede zwei Werthe ihres Arguments, deren Differenz gleich 1 ist, denselben Werth haben. Dies findet z. B. statt, wenn $\psi(y)$ eine willkürliche eindeutige Function von $\cos 2y\pi$ und $\sin 2y\pi$ ist.

Das Resultat, welches sich aus dem Vorstehenden ergiebt, lässt sich nun so aussprechen. Wird durch $\psi(y)$ irgend eine Function bezeichnet, welche

der Bedingung (18.) genügt, und wird

$$(19.) \qquad (u,+x)^y = x^y \frac{\psi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\psi\left(\frac{u}{x}-1\right)} \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}$$

gesetzt, so besitzt diese Function die durch die Gleichungen (1.), (2.), (3.) ausgedrückten Eigenschaften. Es kann daher $(u,+x)^y$, ohne aufzuhören, den genannten Gleichungen zu genügen, gleich wie $\psi(y)$ unendlich viele verschiedene Formen annehmen. Zugleich ist aber auch durch die Formel (19.) die allgemeinste Bestimmung von $(u,+x)^y$ gegeben.

Hierdurch ist nicht nur die ausgesprochene Behauptung, es seien die Gleichungen (1.), (2.), (3.) nicht hinreichend, um $(u,+x)^y$ vollständig zu bestimmen, gerechtfertigt, und die Nothwendigkeit nachgewiesen, in die Definition der Facultät noch eine, in jenen Gleichungen nicht enthaltene Bestimmung aufzunehmen; sondern es ergiebt sich auch daraus, dass die Schlüsse, durch die man aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) völlig bestimmte Darstellungen von $(u,+x)^y$ hergeleitet hat, nicht fehlerfrei sein können und daher einer Revision bedürfen.

§ 3.

Ehe ich aber die verschiedenen von Crelle u. a. entwickelten Formeln in dieser Rücksicht durchgehe, will ich auf einen bisher, wie es scheint, ganz übersehenen Umstand aufmerksam machen, aus dessen Nichtbeachtung grosse Irrthümer hervorgehen können und wirklich hervorgegangen sind. Ich bemerke zuvor, dass ich mich bei allen folgenden Entwickelungen auf reelle Werthe der Basis, der Differenz und des Exponenten beschränke. Denn wenn es auch nicht schwer ist, auch imaginäre Werthe dieser Veränderlichen mit in Betracht zu ziehen, so würde das doch einige vorläufige Erörterungen nöthig machen, die hier der Raum nicht gestattet.

Setzt man in den Gleichungen (1, 3) $x = 0$, so erhält man

$$(20.) \qquad (u,+0)^{y+k} = (u,+0)^y (u,+0)^k$$

$$(21.) \qquad (u,+0)^1 = u.$$

Hieraus ergiebt sich, dass

$$(22.) \qquad (u,+0)^y = u^y$$

sein muss. Aber man darf daraus nicht schliessen, dass $(u,+x)^y$, wenn der

numerische Werth von x unendlich klein wird, nothwendig der Potenz u^y unendlich nahe komme. Vielmehr lässt sich zeigen, dass jede Function, welche den Gleichungen (1.), (2.), (3.) genügt, in der Nähe von $x = 0$ sich nicht stetig ändert. Setzt man nämlich $x = \frac{1}{p}$, unter p eine positive Veränderliche verstanden, so erhält man nach (19.)

$$(23.) \qquad \left(1, +\frac{1}{p}\right)^y = \frac{\psi(p+y-1)}{\psi(p-1)} \cdot p^{-y} \frac{\Pi(p+y-1)}{\Pi(p-1)}$$

oder wegen (17, 18)

$$(24.) \qquad \left(1, +\frac{1}{p}\right)^y = \frac{\psi(p+y)}{\psi(p)} \frac{\Pi(p+y-1)}{p^{y-1}\Pi(p)}$$

Nun ist bekanntlich (s. die angeführte Abhandlung von Gauss) für einen unendlich grossen positiven Werth von p

$$(25.) \qquad \frac{\Pi(p+y)}{p^y \Pi(p)} = 1,$$

oder richtiger wegen der Vieldeutigkeit von p^y

$$(26.) \qquad \frac{\Pi(p+y)}{p^y \Pi(p)} = 1^y.$$

Der Factor $\frac{\psi(p+y)}{\psi(p)}$ ist aber der Formel (18.) gemäss eine periodische Function von p, und nähert sich deshalb, wenn p unendlich gross wird, keiner bestimmten Grenze, wofern nicht etwa die Function ψ eine blosse Constante ist. Daher nähert sich auch $\left(1, +\frac{1}{p}\right)^y$ nur in diesem Falle einer bestimmten Grenze.

Setzt man ferner in der Formel (19.) $-x$ für x, so erhält man

$$(27.) \qquad (u, -x)^y = (-1)^y \frac{\psi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{\psi\left(-\frac{u}{x}-1\right)} x^y \frac{\Pi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x}-1\right)}.$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$(28.) \qquad \Pi(-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi \,.\, \Pi(x-1)},$$

daher, wenn $\frac{(-1)^{\frac{u}{x}}}{(-1)^{\frac{u}{x}-y}}$ für $(-1)^y$ gesetzt wird,

$$(29.) \qquad (u, -x)^y = \frac{(-1)^{\frac{u}{x}} \sin\frac{u}{x}\pi \,.\, \psi\left(-\frac{u}{x}+y-1\right)}{(-1)^{\frac{u}{x}-y} \sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi \,.\, \psi\left(-\frac{u}{x}-1\right)} \cdot x^y \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)},$$

oder wenn man

$$\frac{\psi(-y-1)}{(-1)^y \sin y\pi} = \frac{\psi(-y)}{(-1)^y \sin y\pi} = \varphi(y) \tag{30.}$$

setzt, wo dann φ gleich wie ψ der Bedingung

$$\varphi(y) = \varphi(y-1) \tag{31.}$$

genügt,

$$(u,-x)^y = \frac{\varphi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)} \cdot x^y \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}. \tag{32.}$$

Mithin

$$\left(1,-\frac{1}{p}\right)^y = \frac{\varphi(p-y)}{\varphi(p)} \cdot \frac{p^{-y}\Pi(p)}{\Pi(p-y)}. \tag{33.}$$

Hieraus ergiebt sich ebenso wie vorhin, dass $\left(1,-\frac{1}{p}\right)^y$, wenn p unendlich gross wird, nur dann einer bestimmten Grenze sich nähert, wenn die Function φ sich auf eine Constante reducirt.

Da nun φ und ψ nicht zugleich constant sein können, so folgt, dass der Werth von $(1,+x)^y$, und daher auch der von $(u,+x)^y = u^y\left(1,+\frac{x}{u}\right)^y$ jedenfalls entweder für einen positiven, oder für einen negativen unendlich kleinen Werth von x unbestimmt bleibt. Die Function $(u,+x)^y$ ändert sich also in der Nähe von $x = 0$ nicht stetig.*)

Zu bemerken ist jedoch hierbei, dass dies nur gilt, wenn y keine ganze Zahl ist. Denn in diesem Falle ergiebt sich aus (18.) und (31.)

$$\psi(u \pm y) = \psi(u), \qquad \varphi(u \pm y) = \varphi(u), \tag{34.}$$

und die Functionen ψ, φ fallen aus den Ausdrücken für $(u,+x)^y$ und $(u,-x)^y$ fort.

§ 4.

Nach dem im § 2 Gesagten ist es zur vollständigen Definition der Facultät noch nöthig, hinsichtlich der Function ψ eine Bestimmung zu treffen. Eine solche ist, wie so eben nachgewiesen, enthalten in der Annahme, dass

*) Die hierdurch als unzulässig sich herausstellende Voraussetzung, es sei $(u,+x)^y$ sowohl für einen positiven als negativen unendlich kleinen Werth von x unendlich wenig von u^y verschieden, hat zum Theil Schuld an den Widersprüchen und paradoxen Resultaten, auf die man in der Theorie der Facultäten gerathen ist. — Auch ergieht sich aus dem Gesagten die Unmöglichkeit, $(u,+x)^y$ nach ganzen Potenzen von x in eine convergirende Reihe zu entwickeln.

$(1,+x)^y$ entweder für einen positiven oder negativen Werth von x, wenn dieser ohne Ende abnimmt, der Grenze 1^y sich nähere, indem im ersten Falle ψ, im zweiten die Function φ sich auf eine Constante reduciren muss. Eine dieser Annahmen ist, wie sich ergeben wird, nothwendig, wenn die Analogie der Facultäten und der Potenzen durchgehends behauptet werden soll. Ohne für jetzt näher zu untersuchen, welche von diesen beiden Annahmen zweckmässiger sei, obwohl mir die letztere aus mehreren Rücksichten den Vorzug zu verdienen scheint, will ich beide Arten von Facultäten, die sich aus ihnen ergeben, in Betracht ziehen. Die erste Art, für welche allein fortan die Bezeichnung $(u,+x)^y$ bestimmt bleiben soll, hat die in den obigen Gleichungen (1.), (2.), (3.) ausgedrückten Grundeigenschaften, und ist ferner dadurch charakterisirt, dass $(1,+x)^y$ für einen unendlich kleinen positiven Werth von x der Potenz 1^y unendlich nahe kommt. Man hat für sie den Ausdruck (gemäss (19.))

$$(35.) \qquad (u,+x)^y = x^y \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}.$$

Für die andere Art soll, mit Aenderung des Zeichens von x, die Bezeichnung $[u,-x]^y$ gebraucht werden. Sie wird demnach definirt durch die Grundgleichungen

$$(36.) \qquad [u,-x]^{y+k} = [u,-x]^y[u-yx,-x]^k,$$

$$(37.) \qquad [ku,-kx]^y = k^y[u,-x]^y,$$

$$(38.) \qquad [u,-x]^1 = u,$$

und die Bestimmung, dass, ebenfalls für einen unendlich kleinen positiven Werth von x, $[1,-x]^y$ von der Potenz 1^y unendlich wenig verschieden sei. Ihr Ausdruck ist (nach (32.))

$$(39.) \qquad [u,-x]^y = x^y \frac{\Pi\left(\frac{u}{x}\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}-y\right)}.$$

§ 5.

Ich gehe jetzt zunächst über zu den Entwickelungen von $(u+k,+x)^y$ und $[u+k,-x]^y$. Crelle entwickelt in dem erwähnten Mémoire (§ 41, Nr. 373)

die Formel

$$(40.)\quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y \left\{1 + y_1 \frac{k}{u} + y_2 \frac{k(k-x)}{u(u+x)} + \cdots + y_n \frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n}\right\} + R_n,$$

wo durch y_1, y_2 u. s. w. die Binomial-Coefficienten bezeichnet sind. Der nach dem $n$ten Gliede hinzugefügte Rest R_n ist ein Ausdruck, welcher entwickelt die vorstehende Gleichung zu einer identischen macht. In so fern ist sie, die einzig aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) hergeleitet worden, für alle möglichen Arten von Facultäten, welche diesen Gleichungen entsprechen, gültig. In wie fern sie aber grade für die besondere Art, die hier betrachtet wird, eine convergirende Entwickelung gebe, bedarf noch einer nähern Untersuchung. Diese kann aber nicht nach den von Crelle (Th. d. f., § 23) gegebenen Bestimmungen durchgeführt werden. Nach derselben würde die von ihm mit dem Namen der allgemeinen Taylor'schen Reihe bezeichnete Formel

$$(41.)\quad \mathrm{F}(x+k) = \mathrm{F}(x) + \frac{k}{\alpha}\Delta\mathrm{F}(x) + \frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\Delta^2\mathrm{F}(x) + \cdots + \frac{(k,-\alpha)^n}{(1,+1)^n\alpha^n}\Delta^n\mathrm{F}(x) + R_n,$$

wo $\Delta x = \alpha$ gesetzt ist, immer dann eine convergirende Entwickelung von $\mathrm{F}(x+k)$ geben, sobald der grösseste und der kleinste Werth des $(n+1)$ten Gliedes dieser Reihe für die verschiedenen Werthe des Arguments der Function F von x bis $x+k$ beide für $n = \infty$ auf Null sich reducirten. Dieser Satz ist aber hergeleitet aus einer Bestimmung der Grenzen von R_n, welche, wie Crelle selbst in einer späteren Abhandlung über diesen Gegenstand bemerkt hat, nur dann gültig ist, wenn $\frac{k}{\alpha}$ eine ganze positive Zahl ist. Seine Anwendbarkeit ist daher zweifelhaft, wie sich auch leicht auf folgende Weise nachweisen lässt. Denn gesetzt, die Reihe (41.) sei, nachdem für α ein bestimmter Werth gewählt worden, für eine gewisse Form der Function F wirklich convergent, und es sei $\psi(x)$ eine Function, die für keinen Werth von x unendlich gross wird, und der Bedingung

$$(42.)\qquad \psi(x+\alpha) = \psi(x)$$

genügt, z. B. eine ganze Function von $\cos\frac{2x}{\alpha}\pi$ und $\sin\frac{2x}{\alpha}\pi$; so würde die Reihe für $\psi(x+k)\mathrm{F}(x+k)$, da man alsdann

$$(43.)\qquad \Delta^n.\psi(x)\mathrm{F}(x) = \psi(x)\Delta^n\mathrm{F}(x)$$

hat, zugleich mit der für $\mathrm{F}(x+k)$ convergiren, wenn der in Rede stehende

Satz allgemein richtig wäre. Man würde daher erhalten

$$(44.)\qquad \psi(x+k)\,\mathrm{F}(x+k) = \psi(x)\left\{\mathrm{F}(x)+\frac{k}{\alpha}\,\Delta\mathrm{F}(x)+\frac{k(k-\alpha)}{2\alpha^2}\,\Delta^2\mathrm{F}(x)+\cdots\right\}.$$

Aus (41, 44) würde sich dann für jeden Werth von k, für den die Reihe (41.) convergirt, ergeben

$$(45.)\qquad \psi(x+k) = \psi(x),$$

ein offenbar falsches Resultat.

Die Frage nach der Convergenz der Reihe wird indess leicht auf einem anderen Wege entschieden.

Setzt man mit Gauss in der angeführten Abhandlung

$$(46.)\quad \mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots.n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}+\cdots,$$

welche Reihe eine endliche Summe hat, wenn $\alpha+\beta-\gamma$ negativ ist, so hat man, wie Gauss a. a. O. bewiesen,

$$(47.)\qquad \mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Setzt man in dieser Formel $\gamma=\frac{u}{x}$, $\alpha=-y$, $\beta=-\frac{k}{x}$, so erhält man

$$(48.)\qquad \mathrm{F}\left(-y,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}\right) = \frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}+y-1\right)\Pi\left(\frac{u}{x}-1\right)}{\Pi\left(\frac{u}{x}+y-1\right)\Pi\left(\frac{u+k}{x}-1\right)}.$$

Mithin ist gemäss (35.)

$$\frac{(u+k,+x)^y}{(u,+x)^y} = \mathrm{F}\left(-x,-\frac{k}{x},\frac{u}{x}\right),$$

oder

$$(49.)\qquad \frac{(u+k,+x)^y}{(u,+x)^y} = 1+y_1\frac{k}{u}+y_2\frac{k(k-x)}{u(u+x)}+\cdots\cdots+y_n\frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n}+\cdots,$$

welche Reihe, da $\gamma-\alpha-\beta=\frac{u+k}{x}+y$ ist, convergirt, sobald $\frac{u+k}{x}+y$ positiv ist.

Die Reihe (40.) giebt demnach in allen Fällen, wo sie eine endliche Summe hat, den richtigen Werth von $(u+k,+x)^y$. Anders verhält es sich aber mit der anderen, von Crelle im § 40 entwickelten Reihe.

Setzt man nämlich $\gamma = -\frac{u}{x} - y + 1$, $\alpha = -y$, $\beta = \frac{k}{x}$, so ist

$$(50.) \qquad F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\Pi\left(-\frac{u+k}{x}\right)\Pi\left(-\frac{u}{x} - y\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x}\right)\Pi\left(-\frac{u+k}{x} - y\right)},$$

woraus nach (28.)

$$(51.) \quad F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \,.\, \sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\frac{u+k}{x}\pi \,.\, \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi} \cdot \frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x} + y - 1\right)\Pi\left(\frac{u}{x} - 1\right)}{\Pi\left(\frac{u+k}{x} - 1\right)\Pi\left(\frac{u}{x} + y - 1\right)}$$

folgt. Daher (35.)

$$(52.) \quad \frac{(u+k, +x)^y}{(u, +x)^y} = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x}\right)\pi \,.\, \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \,.\, \sin\frac{u}{x}\pi} \cdot F\left(-y, \frac{k}{x}, -\frac{u}{x} - y + 1\right)$$

oder

$$(53.) \quad \frac{(u+k, +x)^y}{(u, +x)^y} = \frac{\sin\frac{u+k}{x}\pi \,.\, \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi}{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \,.\, \sin\frac{u}{x}\pi} \left\{1 + y_1 \frac{k}{u+xy-x} + y_2 \frac{k(k+x)}{(u+xy-x)(u+xy-2x)} + \cdots\right\}$$

oder

$$(54.) \; (u+k, +x)^y = \frac{\sin\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\pi \,.\, \sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\frac{u+k}{x}\pi \,.\, \sin\left(\frac{u}{x} + y\right)\pi} \left\{(u, +x)^y + y_1 (u, +x)^{y-1} (k, +x)^1 + y_2 (u, +x)^{y-2} (k, +x)^2 + \cdots\right\}.$$

Diese Reihe convergirt, wenn $\gamma - \alpha - \beta = 1 - \frac{u+k}{x}$ positiv ist.

Wenn y eine ganze Zahl ist, so erhält man hieraus die bereits von Kramp aufgestellte Binomial-Formel, welche demnach, wie oben (§ 1) bemerkt worden, für gebrochene Werthe von y ihre Gültigkeit nicht behält.

§ 6.

Zum Behufe der Entwickelung von $[u+k, -x]^y$ mögen zuvörderst folgende, aus den Gleichungen (36, 37, 38) sich ergebende Formeln hier ihren Platz finden.

$$(55.) \qquad [u, -x]^{y-k} = \frac{[u, -x]^y}{[u - yx + kx, -x]^k}$$

$$(56.) \qquad [u, -x]^y = u(u-x)(u-2x)\ldots(u-yx+x),$$

und

$$(57.) \qquad [u,-x]^{-y} = \frac{1}{(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+yx)},$$

wenn y eine ganze positive Zahl ist.

Setzt man nun in der Formel (47.)

$$\alpha = -y, \qquad \beta = -\frac{k}{x}, \qquad \gamma = \frac{u}{x} - y + 1,$$

so erhält man

$$(58.) \qquad \mathrm{F}\left(-y, -\frac{k}{x}, \frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{\Pi\left(\frac{u+k}{x}\right)\Pi\left(\frac{u}{x} - y\right)}{\Pi\left(\frac{u+k}{x} - y\right)\Pi\left(\frac{u}{x}\right)},$$

oder vermöge (39.)

$$(59.) \qquad \mathrm{F}\left(-y, -\frac{k}{x}, \frac{u}{x} - y + 1\right) = \frac{[u+k,-x]^y}{[u,-x]^y},$$

oder

$$(60.) \qquad \frac{[u+k,-x]^y}{[u,-x]^y} = 1 + y_1 \frac{k}{u-yx+x} + y_2 \frac{k(k-x)}{(u-yx+x)(u-yx+2x)} + \cdots + y_n \frac{[k,-x]^n}{[u-yx+nx,-x]^n} + \cdots,$$

woraus endlich (nach 55, 56)

$$(61.) \qquad [u+k,-x]^y = [u,-x]^y + y_1[u,-x]^{y-1}[k,-x]^1 + \cdots + y_n[u,-x]^{y-n}[k,-x]^n + \cdots.$$

Diese Reihen (60, 61) convergiren, wenn $\gamma - \alpha - \beta = \frac{u+k}{x} + 1$ positiv ist. Die Formel (61.) hat die grösseste Aehnlichkeit mit der Binomial-Formel

$$(62.) \qquad (u+k)^y = u^y + y_1 u^{y-1} k + \cdots + y_n u^{y-n} k^n + \cdots,$$

welche aus ihr hervorgeht, wenn man $x = 0$ setzt. Ebenso stellt sich die Aehnlichkeit der Formel (40.) mit derselben heraus, wenn man der letzteren die Form

$$(63.) \qquad (u+k)^y = u^y \left\{1 + y_1 \frac{k}{u} + y_2 \frac{k^2}{u^2} + \cdots + y_n \frac{k^n}{u^n} + \cdots\right\}$$

giebt. Diese Analogie der Facultäten und der Potenzen würde aber, wie aus der vorhergehenden Darstellung erhellt, verloren gehen, wenn man hinsichtlich der Functionen ψ, φ eine andere Bestimmung träfe. Die Reihe (40.) für $(u+k,+x)^y$ würde alsdann noch mit dem Factor

$$\frac{\psi\left(\frac{u+k}{x} + y\right)\psi\left(\frac{u}{x}\right)}{\psi\left(\frac{u+k}{x}\right)\psi\left(\frac{u+k}{x} + y\right)},$$

und die Reihe (61.) für $[u+k,-x]^y$ noch mit dem Factor

$$\frac{\varphi\left(\frac{u+k}{x}\right)\varphi\left(\frac{u}{x}-y\right)}{\varphi\left(\frac{u+k}{x}-y\right)\varphi\left(\frac{u}{x}\right)}$$

zu multipliciren sein.

§ 7.

Crelle entwickelt ferner im § 43 seiner Schrift eine bemerkenswerthe Reihe für $\log (u,+x)^y$. Dabei fällt es jedoch sogleich auf, dass dieselbe einzig aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) hergeleitet wird, während doch bewiesen ist, dass diese allein zur Bestimmung von $(u,+x)^y$ oder $\log (u,+x)^y$ nicht hinreichend sind. Dieser scheinbare Widerspruch findet aber darin seine Erklärung, dass die Convergenz der Reihe auf die im § 5 als unzuverlässig nachgewiesene Weise bestimmt wird. Die Formel selbst ist jedoch richtig, und kann auf folgende Art hergeleitet werden.

Setzt man in der Formel (40.) $x = 1$, und nimmt an, dass $u+y$ positiv sei, so kann man den Werth von k so klein nehmen, dass die Reihe (40.) convergirt und nach ganzen Potenzen von k entwickelt werden kann. Bestimmt man in dieser Entwickelung den Coefficienten von k, so findet sich

$$(64.)\quad \frac{d(u,+1)^y}{du} = (u,+1)^y\left\{y_1\frac{1}{u} - y_2\frac{1}{u(u+1)} + \cdots + (-1)^{n-1}y_n\frac{1.2\ldots(n-1)}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} + \cdots\right\}.$$

Es ist aber, wie bekannt,

$$(65.)\quad \frac{(-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)}{u(u+1)\ldots(u+n-1)} = \Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) \text{ für } \Delta u = 1,$$

daher

$$(66.)\quad \frac{d(u,+1)^y}{du} = (u,+1)^y\left\{y_1\frac{1}{u} + y_2\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_n\Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots\right\},$$

oder

$$(67.)\quad \frac{d\log(u,+1)^y}{du} = y_1\frac{1}{u} + y_2\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_{n+1}\Delta^n\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots.$$

Hieraus folgt durch Integration, wenn man auch u als positiv annimmt, und bemerkt, dass

$$(68.)\quad \Delta^n\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u+n} - \frac{n_1}{u+n-1} + \frac{n_2}{u+n-2} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{u}$$

$$= \frac{d}{du}\{\log(u+n) - n_1\log(u+n-1) + n_2\log(u+n-2) - \cdots + (-1)^n\log u\} = \frac{d.\Delta^n\log u}{du}$$

ist,

$$(69.) \qquad \log(u,+1)^y = C + y_1 \log u + y_2 \Delta \log u + \cdots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \cdots,$$

wo C eine noch zu bestimmende Constante bedeutet.

Es ist

$$\log(u,+1)^y = \log . u^y \left(1,+\frac{1}{u}\right)^y = y \log u + \log \left(1,+\frac{1}{u}\right)^y,$$

daher

$$(70.) \qquad \log \left(1,+\frac{1}{u}\right)^y = C + y_2 \log u + \cdots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \cdots.$$

Nun ist aber $\Delta^n \log u = 0$ für $n = \infty$, also

$$(71.) \qquad \Delta^n \log u = \int_\infty^u \Delta^n \left(\frac{1}{u}\right) . du,$$

und daher auch

$$(72.) \qquad y_2 \Delta \log u + \cdots + y_{n+1} \Delta^n \log \left(\frac{1}{u}\right) + \cdots = \int_\infty^u \left\{ y_2 \Delta \left(\frac{1}{u}\right) + \cdots + y_{n+1} \Delta^n \left(\frac{1}{u}\right) + \cdots \right\} du.$$

Die Summe der Reihe $y_2 \Delta \log u +$ u. s. w. verschwindet also für $u = \infty$, und da $\left(1,+\frac{1}{u}\right)^y = 1$ wird für $u = \infty$, so verschwindet auch $\log \left(1,+\frac{1}{u}\right)^y$ für $u = \infty$; es muss daher $C = 0$ sein. Man hat demnach

$$(73.) \qquad \log(u,+1)^y = y_1 \log u + y_2 \Delta \log u + \cdots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \cdots.$$

Aus dieser Formel ergiebt sich sofort unter der Bedingung, dass $\frac{u}{x}$ und $\frac{u}{x} + y$ beide positiv sind,

$$(74.) \qquad \log(u,+x)^y = y_1 \log u + y_2 \Delta \log u + \cdots + y_{n+1} \Delta^n \log u + \cdots,$$

wo $\Delta u = x$ zu nehmen ist. Diese Formel stimmt überein mit der von Crelle a. a. O. unter Nr. 399 aufgestellten.

Bemerkt man, dass

$$(75.) \qquad (u,+x)^y = (u,+x)^{n+y-n} = (u,+x)^n (u+nx,+x)^{y-n}$$

ist, so sieht man, wie man aus der Formel (74.) immer eine andere herleiten kann, welche zur Berechnung von $\log(u,+x)^y$ dient, sobald nur $\frac{u}{x} + y$ positiv ist. Zu dem Ende braucht man nur für n eine so grosse positive ganze Zahl zu setzen, dass auch $\frac{u+nx}{x} = \frac{u}{x} + n$ positiv wird.

Setzt man in der Formel (35.) $-u$ für u und $-y$ für y, so erhält man

$$(76.) \qquad (-u,+x)^{-y} (u+x,+x)^y = \frac{\Pi\left(-\frac{u}{x} - y - 1\right) \Pi\left(\frac{u}{x} + y\right)}{\Pi\left(-\frac{u}{x} - 1\right) \Pi\left(\frac{u}{x}\right)},$$

oder vermöge (28.)

$$(77.)\qquad (-u,+x)^{-y}(u+x,+x)^{y} = \frac{\sin\frac{u}{x}\pi}{\sin\left(\frac{u}{x}+y\right)\pi}.$$

Aus dieser Formel sieht man, dass die Facultät $(u,+x)^{y}$ für den Fall, dass $\frac{u}{x}+y$ negativ ist, auf eine andere, für die $\frac{u}{x}+y$ positiv ist, zurückgeführt werden kann. Die Reihe (74.) reicht also für alle Fälle zur Berechnung von $(u,+x)^{y}$ aus.

§ 8.

Aus der Formel (60.) erhält man, nachdem $x=1$ gesetzt worden, unter der Voraussetzung, dass $u+1$ positiv sei,

$$(78.)\ \frac{d\log[u,-1]^{y}}{du} = y_1\frac{1}{u-y+1} - y_2\frac{1}{(u-y+1)(u-y+2)} + \cdots + y_n\frac{(-1)^{n-1}\,1.2\ldots(n-1)}{(u-y+1)(u-y+2)\ldots(u-y+n)} + \cdots.$$

Setzt man hier $u-y$ für u, und $-y$ für y, so findet sich, wenn $u-y+1$ positiv ist,

$$(79.)\qquad \frac{d\log[u-y,-1]^{-y}}{du}$$
$$= -y\frac{1}{u+1} + \frac{y(y+1)}{1.2}\frac{1}{(u+1)(u+2)} - \cdots\cdots - \frac{(-1)^{n-1}y(y+1)\ldots(y+n-1)}{1.2\ldots n}\frac{1.2\ldots(n-1)}{(u+1)(u+2)\ldots(u+n)} + \cdots.$$

Aber es ist

$$(80.)\qquad [u-y,-1]^{-y} = \frac{1}{[u,-1]^{y}},$$

$$(81.)\qquad \log[u-y,-1]^{-y} = -\log[u,-1]^{y}.$$

Hiernach ergiebt sich aus (79.) durch Integration auf dieselbe Weise wie im vorhergehenden §, wenn auch $u+1$ als positiv angenommen wird,

$$(82.)\quad \log[u,-1]^{y} = y\log(u+1) + \frac{y(y+1)}{1.2}\Delta\log(u+1) + \cdots + \frac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{1.2\ldots n}\Delta^{n-1}\log(u+1) + \cdots$$

und hieraus, unter der Bedingung, dass $\frac{u}{x}+1$ und $\frac{u}{x}-y+1$ beide positiv sind,

$$(83.)\quad \log[u,-x]^{y} = y\log(u+x) + \frac{y(y+1)}{1.2}\Delta\log(u+x) + \cdots + \frac{y(y+1)\ldots(y+n-1)}{1.2\ldots n}\Delta^{n-1}\log(u+x) + \cdots,$$

wo $\Delta u = x$ zu setzen ist.

Da man

$$[u,-x]^y = [u,-x]^{-n}[u+nx,-x]^{y+n} \tag{84.}$$

hat, so lässt sich, indem man für n eine ganze Zahl so wählt, dass $\frac{u}{x}+n$ positiv wird, aus (83.) immer eine Reihe zur Berechnung von $[u,-x]^y$ herleiten, sobald $\frac{u}{x}-y+1$ positiv ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man die Formel

$$[u,-x]^y[-u-x,-x]^{-y} = \frac{\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi}{\sin\frac{u}{x}\pi}, \tag{85.}$$

die sich aus (28, 39) ergiebt, anwenden, um die Facultät $[u,-x]^y$ auf eine andere zurückzuführen, die sich mit Hülfe der Reihe (83.) berechnen lässt.

In dem Vorstehenden glaube ich nun meine im Anfange ausgesprochene Ansicht über die bisherige Theorie der Facultäten gehörig begründet, und die wichtigsten Formeln für beide in Betracht gezogene Arten dieser Functionen strenge bewiesen zu haben. Es ist jedoch, da es mir zunächst nur darauf ankam, sichere Resultate festzustellen, und diese so viel als möglich aus bekannten Sätzen herzuleiten, der Gang der Entwickelung nicht immer derjenige, welcher bei einer systematischen Darstellung des Gegenstandes zu befolgen sein würde. Ich gedenke, da die Grenzen dieses Aufsatzes keine grössere Ausführlichkeit gestatten, bei einer andern Gelegenheit auf die analytischen Facultäten zurückzukommen.

Dt. Crone, im August 1843.

REDUCTION EINES BESTIMMTEN DREIFACHEN INTEGRALS.

Es seien x, y, z drei reelle veränderliche Grössen, die man sich als die (rechtwinkligen) Coordinaten eines Punktes vorstellen kann; ferner sei

$$r = \sqrt{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy},$$

wo die Coefficienten A, B u. s. w. reell und so beschaffen sein mögen, dass die Grösse unter dem Wurzelzeichen stets positiv ist, wenn x, y, z nicht sämmtlich den Werth Null haben, und wo von den beiden Werthen der Wurzel immer der positive genommen werden soll. Ferner sei $u = fx + gy + hz$ eine homogene lineare Function von x, y, z und $\mathrm{f}(r, u)$ eine Function von r und u. Endlich sei

$$S = \iiint \mathrm{f}(r, u)\, dx\, dy\, dz$$

ein dreifaches Integral, welches sich über alle diejenigen Werthe von x, y, z erstrecken soll, für welche der Werth von r zwischen zwei gegebenen Grenzen a, b enthalten ist, wobei zugleich angenommen wird, dass $\mathrm{f}(r, u)$ für alle diese Werthe endlich bleibe. Der Ausdruck

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$

kann, wenn f, g, h reell sind, wie zunächst angenommen werden soll, in einen anderen

$$\lambda(u^2 + v^2 + w^2)$$

umgeformt werden, wo λ eine positive Constante und v, w reelle lineare Functionen von x, y, z bedeuten, welche die Form

$$v = f'x + g'y + h'z, \qquad w = f''x + g''y + h''z$$

haben. Führt man nun bei der Integration u, v, w statt x, y, z als veränderliche Grössen ein, so muss man, da

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 + 2D\,dy\,dz + 2E\,dz\,dx + 2F\,dx\,dy = \lambda(du^2 + dv^2 + dw^2)$$

ist, nach den Regeln für die Transformation vielfacher Integrale

$$dx\,dy\,dz \quad \text{durch} \quad \sqrt{\frac{\lambda^3}{G}} \cdot du\,dv\,dw$$

ersetzen, wo G die Determinante

$$ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF$$

der quadratischen Form r^2 bedeutet. Demnach wird

$$S = \int\int\int \sqrt{\frac{\lambda^3}{G}}\, \mathrm{f}(r, u)\, du\,dv\,dw,$$

wo sich jetzt die Integration über alle diejenigen Werthe von u, v, w erstrecken muss, für welche

$$\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad \begin{matrix} > a \\ < b \end{matrix}$$

ist. Alle diese Werthe erhält man aber, wenn man

$$u = \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \cos\varphi, \qquad v = \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \sin\varphi \cos\psi, \qquad w = \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \sin\varphi \sin\psi, \qquad r = s$$

setzt und φ alle Werthe zwischen 0 und π, ψ alle Werthe zwischen 0 und 2π, s alle Werthe zwischen a und b durchlaufen lässt. Führt man nun s, φ, ψ statt u, v, w ein, so ist

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = \frac{1}{\lambda}(ds^2 + s^2\,d\varphi^2 + s^2 \sin\varphi^2\, d\psi^2),$$

und es muss $du\,dv\,dw$ durch $\frac{s^2}{\sqrt{\lambda^3}} \sin\varphi\, ds\, d\varphi\, d\psi$ ersetzt werden, wodurch man

$$S = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{s^2}{\sqrt{G}}\, \mathrm{f}\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \cos\varphi\right) \sin\varphi\, ds\, d\varphi\, d\psi$$

erhält, oder

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{G}} \int_a^b \int_0^\pi s^2\, \mathrm{f}\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \cos\varphi\right) \sin\varphi\, ds\, d\varphi.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{\varphi} f\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\sqrt{\lambda}}{s}\int_{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}^{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi} f(s,u)\, du,$$

also

$$\int_0^{\pi} f\left(s, \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\cos\varphi\right)\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\lambda}}{s}\int_{-\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}^{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}} f(s,u)\, du,$$

und somit

$$S = \frac{2\pi\sqrt{\lambda}}{\sqrt{G}}\int_a^b s\, ds \int_{-\frac{s}{\sqrt{\lambda}}}^{\frac{s}{\sqrt{\lambda}}} f(s,u)\, du.$$

Durch diese Formel ist die Bestimmung des vorgelegten dreifachen Integrals zurückgeführt auf zwei nach einander auszuführende Integrationen zwischen bestimmten Grenzen. Es handelt sich nur noch um Ermittelung von λ. Zu dem Ende differentiire man die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = \lambda u^2 + \lambda v^2 + \lambda w^2$$

auf beiden Seiten der Reihe nach in Bezug auf x, y, z, indem man sich x, y, z, wie oben angegeben, ausgedrückt denkt. Dieses giebt

$$\begin{aligned} Ax + Fy + Ez &= \lambda(fu + f'v + f''w) \\ Fx + By + Dz &= \lambda(gu + g'v + g''w) \\ Ex + Dy + Cz &= \lambda(hu + h'v + h''w). \end{aligned}$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man x, y, z durch u, v, w ausdrücken und erhält, indem man

$$\frac{BC-D^2}{G} = A', \quad \frac{CA-E^2}{G} = B', \quad \frac{AB-F^2}{G} = C',$$
$$\frac{EF-AD}{G} = D', \quad \frac{FD-BE}{G} = E', \quad \frac{DE-CF}{G} = F'$$

setzt,

$$\begin{aligned} x &= A'\lambda(fu + f'v + f''w) + F'\lambda(gu + g'v + g''w) + E'\lambda(hu + h'v + h''w) \\ y &= F'\lambda(fu + f'v + f''w) + B'\lambda(gu + g'v + g''w) + D'\lambda(hu + h'v + h''w) \\ z &= E'\lambda(fu + f'v + f''w) + D'\lambda(gu + g'v + g''w) + C'\lambda(hu + h'v + h''w). \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun diese Ausdrücke für x, y, z der Reihe nach mit f, g, h, so muss die Summe dieser Producte $fx + gy + hz$ identisch gleich u werden,

woraus folgt, dass

$$1 = \lambda(A'f^2 + B'g^2 + C'h^2 + 2D'gh + 2E'hf + 2F'fg)$$

sein muss. Setzt man daher $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \varepsilon$, so ist

$$\varepsilon = \sqrt{A'f^2 + B'g^2 + C'h^2 + 2D'gh + 2E'hf + 2F'fg},$$

wo der positive Werth der Wurzel zu nehmen ist, und

$$S = \frac{2\pi}{\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s\,ds \int_{-\varepsilon s}^{+\varepsilon s} \mathrm{f}(s,u)\,du,$$

oder auch, wenn man $u = st$ setzt,

$$S = \frac{2\pi}{\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s^2 ds \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \mathrm{f}(s,st)\,dt.$$

Nimmt man

$$\mathrm{f}(r,u) = \varphi(r).u^m,$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeuten soll, so ist

$$S = \frac{2\pi}{(m+1)\sqrt{G}}(\varepsilon^m - (-1)^{m+1}\varepsilon^m) \int_a^b s^{m+2}\varphi(s)\,ds,$$

oder

$S = 0$, wenn m ungerade,

$$S = \frac{4\pi\varepsilon^m}{(m+1)\sqrt{G}} \int_a^b s^{m+2}\varphi(s)\,ds, \text{ wenn } m \text{ gerade.}$$

Bezeichnet man

$$\frac{4\pi}{m+1} \int_a^b s^{m+2}\varphi(s)\,ds \quad \text{durch } \vartheta_m,$$

so hat man demnach

$$\iiint (fu + gv + hw)^{2m+1}\varphi(r)\,du\,dv\,dw = 0,$$

$$\iiint (fu + gv + hw)^{2m}\ \varphi(r)\,du\,dv\,dw = \frac{\vartheta_{2m}}{\sqrt{G}}(A'f^2 + B'g^2 + C'h^2 + 2D'gh + 2E'hf + 2F'fg)^m.$$

Beide Seiten dieser Gleichungen sind ganze rationale Functionen von f, g, h, und da sie für alle reellen Werthe von f, g, h gelten, so müssen sie auch dann noch bestehen, wenn man diesen Grössen beliebige complexe Werthe beilegt. Daraus folgt weiter, dass auch der obige allgemeine Ausdruck für S seine Gültigkeit behält, wenn f, g, h beliebige complexe Werthe haben,

sobald sich $f(r, u)$ für alle Werthe von r, u, die innerhalb der Grenzen der Integration liegen, in eine nach positiven ganzen Potenzen von u fortschreitende, convergirende Reihe entwickeln lässt.

Wenn insbesondere

$$r = \sqrt{Ax^2 + By^2 + Cz^2}$$

ist, so wird

$$G = ABC$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}}.$$

Wenn

$$f(r, u) = \varphi(r) . e^{k(fx+gy+hz)}$$

ist, so erhält man

$$\iiint \varphi(r)\, e^{k(fx+gy+hz)}\, dx\, dy\, dz = \frac{2\pi}{k\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s\varphi(s) \left(e^{k\varepsilon s} - e^{-k\varepsilon s}\right) ds.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält nur gerade Potenzen von k. Setzt man kv für k, so folgt aus derselben

$$\iiint \varphi(r) \cos k(fx+gy+hz)\, dx\, dy\, dz = \frac{4\pi}{k\varepsilon\sqrt{G}} \int_a^b s\varphi(s) \sin k\varepsilon s\, ds,$$

$$\iiint \varphi(r) \sin k(fx+gy+hz)\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Deutsch-Crone, 1844.

BEITRAG ZUR THEORIE DER ABEL'SCHEN INTEGRALE.

(Beilage zum Jahresbericht über das Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre 1848—1849.)

Unter den sogenannten vollständigen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Art (den Modular- und elliptischen Quadranten nach Gudermann's Benennung), welche zu zwei conjugirten Moduln gehören, findet bekanntlich ein einfacher, zuerst von Legendre aufgefundener Zusammenhang statt, welcher in den jetzt gebräuchlichen Zeichen durch die Gleichung

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

dargestellt wird. In der vorliegenden Abhandlung beabsichtige ich, für die Abel'schen Integrale aller Ordnungen eine Reihe analoger Relationen zu entwickeln, welche, wie ich glaube, nicht bekannt sind. Es findet sich zwar (Crelle's Journal, Bd. 19, S. 312) eine gelegentliche Bemerkung von Jacobi, eine von ihm aufgefundene Verallgemeinerung des Legendre'schen Satzes betreffend; allein nach den Andeutungen, die derselbe a. a. O. giebt, glaube ich annehmen zu dürfen, dass die Relation, welche er im Sinne hat, mit derjenigen übereinstimme, die später Hädenkamp (Crelle's Journal, Bd. 22, S. 184) auf dem von Jacobi angegebenen Wege hergeleitet hat. Die Resultate indess, zu welchen ich gelangt bin, sind nicht nur von dem Hädenkamp'schen verschieden, sondern auch weit einfacher und mit der Legendre'schen Formel übereinstimmender.

Die von mir entwickelten Relationen sind für die Theorie der Abel'schen Transcendenten von besonderer Bedeutung. Ich beschäftige mich seit längerer

Zeit mit dieser Theorie und namentlich mit der Hauptaufgabe, die von Jacobi eingeführten umgekehrten Functionen der Abel'schen Integrale erster Art wirklich darzustellen. Es ist mir gelungen, diese Aufgabe vollständig zu lösen, auf einem Wege, welcher von dem bisher von Göpel u. A. betretenen gänzlich verschieden ist. Ich gehe nämlich unmittelbar von den Integral-Gleichungen aus, durch welche jene Functionen definirt werden, und zeige zunächst, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, dass sie sämmtlich Wurzeln einer und derselben algebraischen Gleichung sind, deren Coefficienten ich sodann durch eine Anzahl von Hülfsfunctionen ausdrücke, welche den sogenannten Θ-Functionen, auf welche Jacobi die elliptischen Functionen zurückgeführt hat, vollkommen analog sind, und gleich diesen durch unendliche, nach einem einfachen Gesetze gebildete und beständig convergirende Reihen dargestellt werden können. Diese Reihen-Entwickelungen gewinne ich, indem ich für die genannten Hülfsfunctionen mehrere charakteristische Eigenschaften nachweise, durch welche sie vollständig bestimmt werden. Dazu aber ist die Kenntniss der Relationen, welche der Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes sind, ein wesentliches Erforderniss. Nun hat zwar der Weg, den ich bei Behandlung der Abel'schen Transcendenten eingeschlagen, das Eigenthümliche, dass man auf ihm selbst in ungesuchter Weise zu jenen Relationen geführt wird, wie ich sie denn in der That auch so zuerst gefunden habe. Es ist aber diese Art der Herleitung einigermassen umständlich, indem namentlich die Bestimmung einiger Constanten Weitläufigkeiten macht. Um so erwünschter war es mir, in einem von Abel in der Abhandlung: Sur une propriété remarquable d'une classe très-étendue de fonctions transcendantes (Œuvres complètes, Tome II, pag. 54) begründeten Theoreme, durch welches die bekannten Sätze über die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Art der elliptischen Integrale eine sehr bemerkenswerthe Verallgemeinerung erhalten, die eigentliche Quelle zu entdecken, aus der die in Rede stehenden Relationen, so wie noch andere weit allgemeinere, auf eben so einfachem als directem Wege abgeleitet werden können.

§ 1.

Es sei $R(x)$ eine ganze Function von x; a, b seien irgend zwei Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, und es werde

$$(1.) \qquad \frac{1}{2}\frac{R(x)-R(y)}{(x-y)^2} - \frac{1}{4}\frac{R'(x)+R'(y)}{x-y} = F(x, y)$$

gesetzt, wo $R'(x)$, $R'(y)$ die ersten Differential-Coefficienten von $R(x)$, $R(y)$ bedeuten, so dass, wie man sich leicht überzeugt, $F(x, y)$ eine ganze Function von x, y ist. Alsdann gilt als ein besonderer Fall des angeführten Abel'schen Theorems die folgende Gleichung, in welcher α, β irgend zwei bestimmte Werthe der Veränderlichen x, y bezeichnen:

$$(2.) \quad \sqrt{R(\alpha)}\int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{R(y)}} - \sqrt{R(\beta)}\int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{R(x)}} = 2\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}.$$

Als nothwendige Bedingung des Bestehens dieser Gleichung ist noch hinzuzufügen, dass innerhalb der Grenzen der Integration $x-y$ nicht gleich Null werden darf.

Es ist nämlich

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{y-x} = \left(\frac{1}{2}\frac{R'(x)}{y-x} + \frac{R(x)}{(y-x)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{R(x)}},$$

$$\frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{x-y} = \left(\frac{1}{2}\frac{R'(y)}{x-y} + \frac{R(y)}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{R(y)}},$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} = \frac{2F(x, y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}},$$

also

$$\int_a^\alpha\int_b^\beta \frac{2F(x, y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \int_b^\beta dy\int_a^\alpha \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}}dx - \int_a^\alpha dx\int_b^\beta \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}}dy$$

$$= \sqrt{R(\alpha)}\int_b^\beta \frac{dy}{(y-\alpha)\sqrt{R(y)}} - \sqrt{R(\beta)}\int_a^\alpha \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{R(x)}}.$$

Es sei nun

$$R(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2n+1})$$

und es werde zunächst angenommen, dass die Grössen $a_1, a_2, \ldots$ sämmtlich reell und so geordnet seien, dass

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n+1}.$$

Alsdann hat $R(x)$, wenn x zwischen den Grenzen a_μ, $a_{\mu+1}$ enthalten ist, wo μ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots 2n$ bedeutet, dasselbe Zeichen wie $(-1)^{\mu-1}$, so dass man setzen kann

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^{\mu-1}\sqrt{(-1)^{\mu-1}R(x)},$$

wo $\sqrt{(-1)^{\mu-1}R(x)}$ den positiven Werth der Quadratwurzel aus der positiven Grösse $(-1)^{\mu-1}R(x)$ bezeichnen soll. Liegt x zwischen $-\infty$ und a_1, so hat man

$$\sqrt{R(x)} = \pm i\sqrt{-R(x)},$$

und wenn x zwischen a_{2n+1} und $+\infty$ enthalten ist,

$$\sqrt{R(x)} = \pm\sqrt{+R(x)}.$$

Um nun einem Integral wie $\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ eine ganz bestimmte Bedeutung zu geben, werde für das Folgende festgesetzt, dass bei der Integration von den beiden Werthen, welche $\sqrt{R(x)}$ hat, immer derjenige in Anwendung kommen soll, den man erhält, wenn man in den vorstehenden Formeln das obere Zeichen nimmt.

Dies festgestellt, setze man in der Gleichung (2.) $a = a_\mu$, $b = a_\nu$ und nehme zunächst an, dass $\nu > \mu+1$, aber $< 2n+1$ sei, so darf man $\alpha = a_{\mu+1}$, $\beta = a_{\nu+1}$ nehmen, weil in diesem Fall die Differenz $x-y$ innerhalb der Grenzen der Integration nicht gleich Null wird. Die linke Seite wird alsdann gleich Null, und man erhält demnach

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = 0. \tag{3.}$$

Wenn aber $\nu = \mu+1$, so kann man den Werth des Doppel-Integrals

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}}\int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}},$$

welches durch S bezeichnet werden möge, mit Hülfe der Gleichung (2.) nicht direct auf dieselbe Weise ermitteln; man gelangt jedoch dazu auf folgendem Wege.

Es werde a_μ durch a, $a_{\mu+1}$ durch c, $a_{\mu+2}$ durch b bezeichnet, so ist

$$S = -\int_a^c\int_b^c \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}.$$

Sodann seien s, t zwei positive Grössen, so gewählt, dass $c-s>a$ und $c+t<b$ bleibt, so ist S die Grenze, welcher sich das Doppel-Integral

$$-\int_a^{c-s}\int_b^{c+t}\frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}=S'$$

nähert, wenn s, t unendlich klein werden. Für dieses letztere Integral aber darf man vermöge der Gleichung (2.) setzen

$$\frac{1}{2}\int_a^{c-s}\frac{\sqrt{R(c+t)}\,dx}{(x-c-t)\sqrt{R(x)}}-\frac{1}{2}\int_b^{c+t}\frac{\sqrt{R(c-s)}\,dy}{(y-c+s)\sqrt{R(y)}}.$$

Dieser Ausdruck wandelt sich, wenn $x=c-u, y=c+v$ gesetzt wird, in den folgenden um:

$$S'=\frac{1}{2}\int_{c-a}^{s}\frac{\sqrt{R(c+t)}}{(u+t)\sqrt{R(c-u)}}\,du-\frac{1}{2}\int_{b-c}^{t}\frac{\sqrt{R(c-s)}}{(v+s)\sqrt{R(c+v)}}\,dv.$$

Es mögen jetzt σ, τ zwei bestimmte Werthe von s und t bezeichnen, die nur so klein anzunehmen sind, dass sich $\sqrt{R(c-s)}$, $\sqrt{R(c+t)}$ für alle Werthe von s, t, welche nicht grösser als σ, τ sind, durch convergirende Reihen, die nach aufsteigenden Potenzen dieser Veränderlichen fortschreiten, darstellen lassen. Alsdann hat man

$$2S'=\sqrt{R(c+t)}\int_{c-a}^{\sigma}\frac{du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}}-\sqrt{R(c-s)}\int_{b-c}^{\tau}\frac{dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}$$
$$+\int_{\sigma}^{s}\frac{\sqrt{R(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}}-\int_{\tau}^{t}\frac{\sqrt{R(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}.$$

Die Integrale

$$\int_{c-a}^{\sigma}\frac{du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}},\qquad \int_{b-c}^{\tau}\frac{dv}{(s+c)\sqrt{R(c+v)}}$$

bleiben für alle Werthe von t, s innerhalb der für diese Veränderlichen bezeichneten Grenzen endlich; $\sqrt{R(c+t)}$, $\sqrt{R(c-s)}$ nähern sich aber, wenn t, s unendlich klein werden, der Grenze $\sqrt{R(c)}=0$. Daraus folgt, dass die Grenze von S' für $t=0, s=0$ dieselbe ist wie die, welcher sich die Formel

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma}^{s}\frac{\sqrt{R(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}}-\frac{1}{2}\int_{\tau}^{t}\frac{\sqrt{R(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}}$$

nähert, wenn s, t unendlich klein werden.

Nach den oben für $\sqrt{R(x)}$ getroffenen Bestimmungen kann man nun, da $c-u$ zwischen a_μ und $a_{\mu+1}$, $c+v$ zwischen $a_{\mu+1}$ und $a_{\mu+2}$ liegt, setzen

$$\sqrt{R(c+v)} = i^\mu \sqrt{(-1)^\mu R'(c)}.\sqrt{v.(1+F(v))},$$
$$\sqrt{R(c-u)} = i^{\mu-1} \sqrt{(-1)^\mu R'(c)}.\sqrt{u.(1+F(-u))},$$

wo $F(v)$ in eine convergirende Reihe entwickelt werden kann, die nur ganze, positive Potenzen von v enthält, und $F(-u)$ aus $F(v)$ hervorgeht, wenn man $-u$ für v setzt. $\sqrt{u}$ und $\sqrt{v}$ sind positiv zu nehmen. Alsdann ist

$$\int_\sigma^s \frac{\sqrt{R(c+t)}\,du}{(t+u)\sqrt{R(c-u)}} = \int_\sigma^s \frac{i\sqrt{t.(1+F(t))}\,du}{(t+u)\sqrt{u.(1+F(-u))}}$$
$$= i\int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}\,du}{(t+u)\sqrt{u}} + i\sqrt{t}\int_\sigma^s \frac{F(t)-F(-u)}{t+u}\cdot\frac{du}{\sqrt{u.(1+F(-u))}}.$$

Der zweite Theil auf der rechten Seite dieser Gleichung lässt sich, weil $F(t)-F(-u)$ durch $t+u$ dividirbar ist, in eine Reihe von Gliedern entwickeln, welche nur positive Potenzen von s, σ, t enthalten und für $t=0$ verschwinden. Ebenso findet man

$$\int_\tau^t \frac{\sqrt{R(c-s)}\,dv}{(s+v)\sqrt{R(c+v)}} = -i\int_\tau^t \frac{\sqrt{s}\,dv}{(s+v)\sqrt{v}} + \text{Glieder, die für } s=0 \text{ verschwinden.}$$

Daraus ergiebt sich, dass der Werth von S die Grenze ist, welcher sich die Formel

$$\frac{i}{2}\int_\sigma^s \frac{\sqrt{t}\,du}{(t+u)\sqrt{u}} + \frac{i}{2}\int_\tau^t \frac{\sqrt{s}\,dv}{(s+v)\sqrt{v}}$$

nähert, wenn t, s unendlich klein werden. Diese Formel lässt sich aber, wenn man bei dem ersten Integrale die Substitution $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = w$, bei dem anderen die Substitution $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{v}} = w$ anwendet, und $\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\tau}} = p$, $\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{t}} = q$ setzt, umwandeln in

$$\frac{1}{i}\int_p^q \frac{dw}{1+w^2},$$

welcher Ausdruck für $s=0$, $t=0$ übergeht in

$$\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{dw}{1+w^2} = \frac{\pi}{2i}.$$

Es ist demnach

$$S = \frac{\pi}{2i},$$

oder

(4.) $$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} \frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2i}.$$

§ 2.

Die Doppel-Integrale auf der linken Seite der Gleichungen (3, 4) des vorhergehenden § können, weil $F(x, y)$ in Beziehung auf x sowohl als y eine ganze Function vom $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, dargestellt werden als ein Aggregat von Gliedern, von denen jedes ein Product zweier Abel'schen Integrale der ersten und zweiten Art ist; die Gleichungen (3, 4) geben also eine Reihe von Relationen unter solchen Integralen, die man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Integrale nennen kann.

Wenn $R(x)$ vom dritten Grade ist, so ist $F(x, y) = \frac{1}{4}(y-x)$, und es reduciren sich die Gleichungen auf die einzige

(1.) $$\int_{a_1}^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x)\,dx\,dy}{4\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} = \frac{\pi}{2i},$$

oder

(2.) $$\int_{a_1}^{a_2} \int_{a_2}^{a_3} \frac{(y-x)\,dx\,dy}{4\sqrt{R(x)}\sqrt{-R(y)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man

$$\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}} = t, \quad \sqrt{\frac{y-a_1}{a_2-a_1}} = s, \quad \sqrt{\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}} = k,$$

so ist

$$\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} = \frac{1}{\sqrt{a_3-a_1}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{-R(y)}} = \frac{1}{\sqrt{a_3-a_1}} \frac{ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}},$$

und die Gleichung (2.) geht, wenn man

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = K_1,$$

$$\int_0^1 \frac{k^2s^2\,ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = J, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2s^2\,ds}{\sqrt{(s^2-1)(1-k^2s^2)}} = J_1$$

setzt, über in die folgende:

$$KJ_1 - JK_1 = \frac{\pi}{2}. \tag{3.}$$

Diese Gleichung ist identisch mit der oben angeführten Legendre'schen. Denn es ist

$$J = K - E,$$

und wenn man

$$k' = \sqrt{1-k^2}, \qquad t = \frac{1}{k}\sqrt{1-k'^2 w^2}$$

setzt, so erhält man

$$K_1 = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k'^2 w^2)}} = K',$$

und durch dieselbe Substitution

$$J_1 = E',$$

mithin

$$KE' - (K-E)K' = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2}. \tag{4.}$$

Ich werde jetzt zeigen, dass man den Gleichungen (3, 4) des § 1 eine ganz ähnliche Gestalt geben kann, wie der Gleichung (3.) dieses §. Zu dem Ende wird es aber nöthig sein, einige Bemerkungen über die Form, unter welcher nach meiner Ansicht die Abel'schen Transcendenten zu behandeln sind, voraus zu schicken.

§ 3.

Dem System der Integral-Gleichungen, von welchem man nach Jacobi in der Theorie der Abel'schen Transcendenten ausgehen muss, kann man immer folgende Form geben, welche mir die angemessenste zu sein scheint, wenn man die Analogie dieser Functionen mit den elliptischen so viel als möglich will hervortreten lassen.

Es werde die Function $R(x)$ in zwei Factoren $P(x)$, $Q(x)$ zerfällt, und zwar sei

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2n-1})(x-a_{2n+1}),$$
$$Q(x) = (x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n}).$$

Ferner werde

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{(a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1})P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}} = g_{\mathfrak{a}}, \qquad \frac{g_{\mathfrak{a}}P(x)}{x-a_{2\mathfrak{a}-1}} = F_{\mathfrak{a}}(x)$$

gesetzt, wo $\mathfrak{a}$, wie überhaupt jeder im Folgenden als Index vorkommende

deutsche Buchstabe, eine der Zahlen 1, 2, 3, ... n bedeutet, und es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ n Veränderliche, welche als Functionen eben so vieler veränderlichen Argumente $u_1, u_2, \ldots u_n$ durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \Sigma\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ u_2 = \Sigma\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \Sigma\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \end{array}\right.$$

definirt werden, in denen sich das Summenzeichen auf den Index α bezieht. Es handelt sich darum, die Functionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch ihre Argumente in einer für alle Werthe der letzteren gültig bleibenden Form wirklich auszudrücken.

Zunächst erhält man für dieselben unendliche Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ fortschreiten, und zwar ist, wenn man durch $(u_1, u_2, \ldots u_n)_\alpha$ eine homogene Function des α^{ten} Grades von $u_1, u_2, \ldots$ bezeichnet,

$$(2.)\qquad \sqrt{\frac{x_\alpha - a_{2\alpha-1}}{a_{2\alpha} - a_{2\alpha-1}}} = u_\alpha + (u_1, u_2, \ldots u_n)_3 + (u_1, u_2, \ldots u_n)_5 + \cdots$$

Diese Reihen convergiren zwar nicht beständig, aber doch für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots$, die ihrem absoluten Betrage nach bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Sodann kann man mit Hülfe des Abel'schen Theorems nachweisen, dass $x_1, x_2, \ldots x_n$ Wurzeln einer und derselben Gleichung n^{ten} Grades sind, der man die Form

$$(3.)\qquad \frac{a_2 - a_1}{x - a_1} p_1^2 + \frac{a_4 - a_3}{x - a_3} p_2^2 + \cdots + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{x - a_{2n-1}} p_n^2 = 1$$

geben kann, wo $p_1, p_2, \ldots p_n$ eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ sind, die ganz den Charakter rationaler Functionen besitzen. In Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$ entwickelt haben sie genau dieselbe Gestalt wie die Reihe auf der rechten Seite der Gleichung (2.), woraus erhellt, dass p_α eine ungrade Function von $u_1, u_2, \ldots$ ist. Ferner hat man

$$(4.)\qquad p_\alpha = \sqrt{\frac{(a_{2\alpha-1} - x_1)(a_{2\alpha-1} - x_2)\ldots(a_{2\alpha-1} - x_n)}{(a_{2\alpha-1} - a_{2\alpha})\,P'(a_{2\alpha-1})}}.$$

Für $n = 1$ ergiebt sich, wenn man x, u, p für x_1, u_1, p_1 schreibt,

$$u = \int_{a_1}^{x} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{a_3 - a_1}\,.\,dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}},$$

$$p = \sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}},$$

woraus

$$u = \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)(1-k^2p^2)}}, \qquad k^2 = \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}$$

folgt, so dass $p = \sin\mathrm{am}\,u$, oder nach Gudermann's kürzerer Bezeichnung (Theorie der Modular-Functionen) $p = \mathrm{sn}\,u$ ist. In Erweiterung dieser letzteren Bezeichnung setze ich

$$p_\alpha = \mathrm{sn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_\alpha,$$

sowie ferner

$$(5.) \qquad \sqrt{\frac{(a_{2\alpha}-x_1)(a_{2\alpha}-x_2)\ldots(a_{2\alpha}-x_n)}{P(a_{2\alpha})}} = \mathrm{cn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_\alpha$$

$$(6.) \qquad \sqrt{\frac{(a_{2n+1}-x_1)(a_{2n+1}-x_2)\ldots(a_{2n+1}-x_n)}{P(a_{2n+1})}} = \mathrm{dn}(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Auf diese Weise sind in die Theorie der Abel'schen Transcendenten $(2n+1)$ Functionen eingeführt, welche mit den drei elliptischen Functionen

$$\sin\mathrm{am}\,u = \mathrm{sn}\,u, \qquad \cos\mathrm{am}\,u = \mathrm{cn}\,u, \qquad \Delta\,\mathrm{am}\,u = \mathrm{dn}\,u,$$

in welche sie für $n = 1$ übergehen, eine grosse Aehnlichkeit haben. So z. B. lässt sich $\mathrm{sn}(u+v)$ rational durch $\mathrm{sn}\,u$, $\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}$, $\mathrm{sn}\,v$, $\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv}$ ausdrücken vermittelst der Formel

$$\mathrm{sn}(u+v) = \frac{\mathrm{sn}\,u^2 - \mathrm{sn}\,v^2}{\mathrm{sn}\,u\frac{d\,\mathrm{sn}\,v}{dv} - \mathrm{sn}\,v\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{du}} = \frac{\mathrm{sn}\,u^2 - \mathrm{sn}\,v^2}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v - \mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u},$$

und ähnliche Formeln gelten für $\mathrm{cn}(u+v)$ und $\mathrm{dn}(u+v)$. Für die angegebenen Functionen mehrerer Veränderlichen aber findet man,

$$\frac{a_{2\alpha}-a_{2\alpha-1}}{2g_\alpha} = e_\alpha$$

setzend:

$$(7.) \quad \sum_\alpha e_\alpha \Big(\mathrm{sn}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha \frac{d\,\mathrm{sn}(v_1, v_2, \ldots)_\alpha}{dv_\beta} - \mathrm{sn}(v_1, v_2, \ldots)_\alpha \frac{d\,\mathrm{sn}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{du_\beta}\Big) \cdot \mathrm{sn}(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots)_\alpha$$
$$= e_\beta\,.\,(\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_\beta - \mathrm{sn}^2(v_1, v_2, \ldots)_\beta).$$

Setzt man in dieser Gleichung β der Reihe nach gleich $1, 2, \ldots n$, so erhält

man n Gleichungen, vermittelst welcher die n Functionen $\mathrm{sn}(u_1+v_1, u_2+v_2, \ldots)_a$ rational durch $\mathrm{sn}(u_1, u_2, \ldots)_a$, $\mathrm{sn}(v_1, v_2, \ldots)_a$ und deren partielle Differential-Coefficienten, welche letztere algebraische Functionen jener sind, ausgedrückt werden können. Ähnliches gilt für die durch cn, dn bezeichneten Functionen. Bezeichnet man ferner

$$(8.) \qquad \int_{a_{2b-1}}^{a_{2b}} \frac{F_a(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad K_{a,b},$$

$$(9.) \qquad \int_{a_{2b}}^{a_{2b+1}} \frac{F_a(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \frac{\overline{K}_{a,b}}{i}$$

und setzt

$$(10.) \qquad \sum_{c=b}^{c=n} \overline{K}_{a,c} = \overline{K}_{a,b} + \overline{K}_{a,b+1} + \cdots + \overline{K}_{a,n} = K'_{a,b},$$

so haben diese $2.n^2$ bestimmten Integrale $K_{a,b}$, $K'_{a,b}$ für die Theorie der Abel'schen Transcendenten eine ganz ähnliche Bedeutung wie die Grössen K, K' für die elliptischen Functionen. So z. B. findet man, wenn man

$$(11.) \quad \omega_a = \mathfrak{m}_1 K_{a,1} + \mathfrak{m}_2 K_{a,2} + \cdots + \mathfrak{m}_n K_{a,n} + (\mathfrak{n}_1 K'_{a,1} + \mathfrak{n}_2 K'_{a,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{a,n})\,i$$

setzt, wo $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_2$, ... ganze (positive oder negative) Zahlen bedeuten, für die Functionen sn, cn, dn die charakteristischen Gleichungen

$$(12.) \quad \begin{cases} \mathrm{sn}(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2, \ldots u_n+2\omega_n)_a = (-1)^{\mathfrak{m}_a+\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\cdots+\mathfrak{n}_{a-1}} \mathrm{sn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_a \\ \mathrm{cn}(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2, \ldots u_n+2\omega_n)_a = (-1)^{\mathfrak{m}_a+\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\cdots+\mathfrak{n}_a} \mathrm{cn}(u_1, u_2, \ldots u_n)_a \\ \mathrm{dn}(u_1+2\omega_1, u_2+2\omega_2, \ldots u_n+2\omega_n) = (-1)^{\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2+\cdots+\mathfrak{n}_n} \mathrm{dn}(u_1, u_2, \ldots u_n), \end{cases}$$

in welchen Formeln, wenn $a = 1$ ist, $\mathfrak{n}_0 = 0$ zu setzen ist.

Die Functionen sn, cn, dn stehen übrigens in einem einfachen algebraischen Zusammenhange, vermöge dessen je $(n+1)$ derselben durch die übrigen ausgedrückt werden können.

Was nun ferner die Abel'schen Integrale der zweiten Art anlangt, so lassen sich dieselben durch n neue Functionen der Argumente u_1, u_2, ... ausdrücken, von denen ich die a^{te} durch $J(u_1, u_2, \ldots u_n)_a$ bezeichne und auf folgende Weise definire. Man denke sich x_1, x_2, ... vermittelst der Gleichung (3.) durch u_1, u_2, ... ausgedrückt und setze

$$(13.) \qquad J(u_1, u_2, \ldots u_n)_a = \sum_b \int_{a_{2b-1}}^{x_b} \frac{a_{2a} - a_{2a-1}}{x - a_{2a-1}} \cdot \frac{F_a(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

mit der Bestimmung, dass x und $\sqrt{R(x)}$ bei jeder einzelnen Integration dieselben Werthe durchlaufen wie in den Gleichungen (1.).*) Auf diese Weise erklärt ist $J(u_1, u_2, \ldots)_a$ eine für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ völlig bestimmte, eindeutige Function. Drückt man $dx_1, dx_2, \ldots$ durch $du_1, du_2, \ldots$ aus, so ergiebt sich für $J(u_1, u_2, \ldots u_n)_a$ der Ausdruck

$$(14.) \quad \int \left(\frac{du_a}{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_a} + \sum_b \frac{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_b}{\mathrm{sn}^2(u_1, u_2, \ldots)_a} \cdot \frac{e_b(a_{2a} - a_{2a-1})\,du_b - e_a(a_{2b} - a_{2b-1})\,du_a}{e_a(a_{2a-1} - a_{2b-1})} \right),$$

wo für b der Werth a auszuschliessen ist. Durch diese Gleichung ist $J(u_1, u_2, \ldots)_a$ vollständig bestimmt, wenn noch hinzugefügt wird, dass in der Entwickelung dieser Function nach fallenden Potenzen von u_a kein von

---

*) In der Formel (13.) und in einigen folgenden habe ich mir erlaubt, die allgemein eingeführte Bezeichnung für ein bestimmtes Integral in einem Sinne zu gebrauchen, in welchem sie auch dann noch anwendbar bleibt, wenn die Function unter dem Integral-Zeichen an einer der Grenzen der Integration oder an beiden unendlich wird. Es sei nämlich $F(x)$ eine Function von x, die für alle Werthe dieser Veränderlichen innerhalb eines gegebenen Intervalls, dessen Grenzen a, b sind, endlich bleibt, und es lasse sich dieselbe für alle Werthe von x in der Nähe von a durch eine Reihe von der Form

$$\mathrm{S}A(x-a)^m,$$

so wie für die Werthe von x in der Nähe von b durch eine Reihe

$$\mathrm{S}B(x-b)^n$$

darstellen. Sind nun α, β zwei bestimmte Werthe von x innerhalb des gegebenen Intervalls, der erste in der Nähe von a, der andere in der Nähe von b angenommen, so kann man, wenn unter den Exponenten m, n keiner gleich -1 ist (auf welchen Fall ich mich hier beschränke), setzen

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = C + \mathrm{S}\frac{1}{n+1} B(\beta - b)^{n+1} - \mathrm{S}\frac{1}{m+1} A(\alpha - a)^{m+1},$$

wo C einen von α, β unabhängigen Werth hat. Wenn die Exponenten $m+1, n+1$ sämmtlich positiv sind, so ist

$$C = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Weil aber C auch dann noch einen bestimmten endlichen Werth hat, wenn einige der Exponenten $m+1$, $n+1$ negativ sind, so scheint es mir gestattet und angemessen zu sein, die Formel $\int_a^b F(x)\,dx$ allgemein als das constante Glied in der Entwickelung von $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx$ nach Potenzen von $(\alpha - a)$ und $(\beta - b)$ zu definiren. In diesem Sinne ist im Verlauf der Abhandlung die Bezeichnung $\int_a^b$ überall aufzufassen.

$u_1, u_2, \ldots u_n$ unabhängiges Glied vorkommen darf. Für den Fall der elliptischen Functionen hat man

$$J(u) = \int \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u},$$

während man gewöhnlich die elliptischen Integrale zweiter Art auf die Function $\int_0 \mathrm{dn}^2 u . du$ zurückführt, was keinen wesentlichen Unterschied macht. Für die Abel'schen Integrale zweiter Art haben aber die hier gewählten Formen den Vorzug, dass sich viele Formeln einfacher gestalten, als es der Fall sein würde, wenn man, was ohne Schwierigkeit angeht, Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ einführte, welche dem angeführten elliptischen Integral conform sind.

Man bezeichne nun

$$(15.) \qquad \begin{aligned} &\int_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\, dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \\ &\int_{a_{2\mathfrak{b}}}^{a_{2\mathfrak{b}+1}} \frac{a_{2\mathfrak{a}} - a_{2\mathfrak{a}-1}}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\, dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \frac{\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{i} \end{aligned}$$

und

$$(16.) \qquad \sum_{\mathfrak{c}=\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}=n} \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1} + \cdots + \overline{J}_{\mathfrak{a},n} \quad \text{durch} \quad J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

so erhält man $2 . n^2$ bestimmte Integrale $J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, welche man in Erweiterung der Legendre'schen Benennung vollständige Abel'sche Integrale zweiter Art nennen kann, und die in der Theorie der Abel'schen Transcendenten dieselbe Bedeutung haben wie die Grössen

$$K - E,\ E',$$

auf welche sie sich für $n = 1$ reduciren, für die elliptischen Functionen. Während z. B.

$$J(u) = \int_0 \frac{du}{\mathrm{sn}^2 u} = \int_0 k^2 \mathrm{sn}^2 u . du - \frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}\, u} = u - \int_0 \mathrm{dn}^2 u . du - \frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{sn}\, u},$$

und daher, wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ganze Zahlen sind,

$$J(u + 2\mathfrak{m}K + 2\mathfrak{n}K'i) = J(u) + 2\mathfrak{m}(K - E) + 2\mathfrak{n}E'i$$

ist, so erhält man, wenn man setzt

$$(17.) \qquad \begin{cases} \omega_\alpha = \sum_\beta (m_\beta K_{\alpha,\beta} + n_\beta K'_{\alpha,\beta} i) \\ \varepsilon_\alpha = \sum_\beta (m_\beta J_{\alpha,\beta} + n_\beta J'_{\alpha,\beta} i): \end{cases}$$

$$(18.) \qquad J(u_1 + 2\omega_1, u_2 + 2\omega_2, \ldots u_n + 2\omega_n)_\alpha = J(u_1, u_2, \ldots u_n)_\alpha + 2\varepsilon_\alpha.$$

Nach diesen vorläufigen Auseinandersetzungen, deren nähere Begründung einer ausführlichen Bearbeitung der Abel'schen Transcendenten vorbehalten bleiben muss, werde ich nun nachweisen, dass die Gleichungen (3, 4) des § 1 eine Reihe einfacher Relationen unter den $4.n^2$ Grössen $K_{\alpha,\beta}$, $K'_{\alpha,\beta}$, $J_{\alpha,\beta}$, $J'_{\alpha,\beta}$ enthalten.

§ 4.

Es seien a, b, c, d irgend vier Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, und es werde

$$\sum_\alpha \left(\frac{a_{2\alpha} - a_{2\alpha-1}}{y - a_{2\alpha-1}} - \frac{a_{2\alpha} - a_{2\alpha-1}}{x - a_{2\alpha-1}} \right) \frac{F_\alpha(x) F_\alpha(y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}} \text{ durch } U,$$

$$\int_a^b \int_c^d U\, dx\, dy \text{ durch } T$$

bezeichnet. Substituirt man für $F_\alpha(x)$, $F_\alpha(y)$ die in § 3 gegebenen Ausdrücke, so erhält man zunächst

$$U = \frac{1}{4} \sum_\alpha \frac{Q(a_{2\alpha-1})}{P'(a_{2\alpha-1})} \left(\frac{1}{(a_{2\alpha-1} - x)^2 (a_{2\alpha-1} - y)} - \frac{1}{(a_{2\alpha-1} - y)^2 (a_{2\alpha-1} - x)} \right) \frac{P(x) P(y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}$$

und daraus, indem man

$$\sum_\alpha \frac{Q(a_{2\alpha-1})}{(a_{2\alpha-1} - x)(a_{2\alpha-1} - y) P'(a_{2\alpha-1})} \text{ durch } V$$

bezeichnet,

$$U = \frac{1}{4} \left(\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy} \right) \frac{P(x) P(y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}.$$

Es ist aber, nach bekannten Sätzen über die Zerlegung der Brüche,

$$\frac{Q(t)}{(t-x)(t-y) P(t)}$$

$$= \frac{Q(x)}{(x-y) P(x)} \cdot \frac{1}{t-x} - \frac{Q(x)}{(x-y) P(y)} \cdot \frac{1}{t-y} + \sum_\alpha \frac{Q(a_{2\alpha-1})}{(a_{2\alpha-1} - x)(a_{2\alpha-1} - y) P'(a_{2\alpha-1})} \cdot \frac{1}{t - a_{2\alpha-1}}.$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach fallenden Potenzen von

t und setzt die beiden Coefficienten von t^{-1} einander gleich, so ergiebt sich

$$V = 1 - \frac{Q(x)}{(y-x)P(x)} + \frac{Q(y)}{(x-y)P(y)}.$$

Setzt man daher $\frac{Q(x)}{P(x)} = N(x)$, wo dann $R(x) = P^2(x).N(x)$ wird, so ist

$$V = 1 - \frac{N(x)-N(y)}{x-y},$$

und daher

$$U = \left(\frac{1}{2}\frac{N(x)-N(y)}{(x-y)^2} - \frac{1}{4}\frac{N'(x)+N'(y)}{x-y}\right).\frac{1}{\sqrt{N(x)}\sqrt{N(y)}}.$$

Dieser Ausdruck für U lässt sich (s. § 1 im Anfange) umgestalten in den folgenden:

$$2U = \frac{d}{dx}\frac{\sqrt{N(x)}}{(y-x)\sqrt{N(y)}} - \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{N(y)}}{(x-y)\sqrt{N(x)}}.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{N(x)}}{(y-x)\sqrt{N(y)}} &= \frac{P(y)}{P(x)}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} \\ &= \frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} + \frac{P(y)-P(x)}{y-x}\frac{\sqrt{R(x)}}{P(x)\sqrt{R(y)}}, \\ \frac{\sqrt{N(y)}}{(x-y)\sqrt{N(x)}} &= \frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} + \frac{P(x)-P(y)}{x-y}\frac{\sqrt{R(y)}}{P(y)\sqrt{R(x)}},\end{aligned}$$

und daher, wenn man

$$\frac{P(x)-P(y)}{x-y} = G(x,y)$$

setzt,

$$\begin{aligned}2U = &\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}} \\ &+ \frac{d}{dx}\frac{G(x,y)\sqrt{R(x)}}{P(x)\sqrt{R(y)}} - \frac{d}{dy}\frac{G(x,y)\sqrt{R(y)}}{P(y)\sqrt{R(x)}}.\end{aligned}$$

Bezeichnen nun α, β zwei bestimmte Werthe von x in dem Intervall (a, b), und zwar der erste in der Nähe von a, der andere in der Nähe von b gelegen, und ebenso γ, δ zwei Werthe von y in dem Intervall (c, d), der erste in der Nähe von c, der andere in der Nähe von d gelegen, so ergiebt sich aus der vorstehenden Formel mit Beachtung der im § 1 bewiesenen Gleichung

$$\frac{d}{dx}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}}-\frac{d}{dy}\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}}=\frac{2F(x,y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}:$$

$$\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta U\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta\frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}$$
$$+\frac{1}{2}\int_\gamma^\delta\left(\frac{G(\beta,y)\sqrt{R(\beta)}}{P(\beta)\sqrt{R(y)}}-\frac{G(\alpha,y)\sqrt{R(\alpha)}}{P(\alpha)\sqrt{R(y)}}\right)dy$$
$$-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left(\frac{G(x,\delta)\sqrt{R(\delta)}}{P(\delta)\sqrt{R(x)}}-\frac{G(x,\gamma)\sqrt{R(\gamma)}}{P(\gamma)\sqrt{R(x)}}\right)dx.$$

Denkt man sich jetzt beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von $\alpha-a$, $\beta-b$, $\gamma-c$, $\delta-d$ entwickelt, so ist das constante Glied auf der linken Seite die oben durch T bezeichnete Grösse; auf der rechten Seite aber findet sich als constantes Glied das Doppel-Integral

$$\int_a^b\int_c^d\frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}.$$

Mithin

(1.)
$$\int_a^b\int_c^d\frac{F(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}}=\int_a^b\int_c^d U\,dx\,dy=$$
$$\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\int_a^b\frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\int_c^d\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{y-a_{2\mathfrak{a}-1}}\frac{F_{\mathfrak{a}}(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}}-\int_c^d\frac{F_{\mathfrak{a}}(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}}\int_a^b\frac{a_{2\mathfrak{a}}-a_{2\mathfrak{a}-1}}{x-a_{2\mathfrak{a}-1}}\frac{F_{\mathfrak{a}}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\right\}.$$

Nimmt man nun

$$a=a_{2\mathfrak{b}-1},\qquad b=a_{2\mathfrak{b}},\qquad c=a_{2\mathfrak{c}-1},\qquad d=a_{2\mathfrak{c}},$$

so erhält man aus der vorstehenden Gleichung (nach § 1, Gl. 3)

(2.)
$$\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0.^*)$$

Nimmt man

$$a=a_{2\mathfrak{b}},\qquad b=a_{2\mathfrak{b}+1},\qquad c=a_{2\mathfrak{c}},\qquad d=a_{2\mathfrak{c}+1},$$

*) Wenn in einer Formel, wie hier, mehrere deutsche Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ vorkommen, welche, wie schon oben bemerkt worden ist, hier ausschliesslich ganze Zahlen, aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$ genommen, bezeichnen sollen, so bezieht sich das Summenzeichen auf denjenigen von ihnen, der unter dem $\sum$ ausdrücklich angezeigt ist, und der dann sämmtliche in der angegebenen Reihe enthaltenen Werthe durchlaufen muss, während jeder andere einen stehenden Werth hat. Sind unter dem Summenzeichen mehrere Buchstaben bezeichnet, so muss jeder derselben, unabhängig von den übrigen, dieselben Werthe durchlaufen.

so ergiebt sich

$$\sum_{\mathfrak{a}}(\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0. \tag{3.}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ für $\mathfrak{c}$ und summirt von $\mathfrak{m}=\mathfrak{b}$ bis $\mathfrak{m}=n$, und von $\mathfrak{n}=\mathfrak{c}$ bis $\mathfrak{n}=n$, so findet man

$$\sum_{\mathfrak{a}}(K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0. \tag{4.}$$

Nimmt man ferner

$$a=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad b=a_{2\mathfrak{b}},\quad c=a_{2\mathfrak{b}},\quad d=a_{2\mathfrak{b}+1},$$

so findet sich (nach § 1, Gl. 4)

$$\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})=\frac{\pi}{2}, \tag{5.}$$

und für

$$a=a_{2\mathfrak{b}-2},\quad b=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad c=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad d=a_{2\mathfrak{b}}:$$

$$\sum_{\mathfrak{a}}(\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}-\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})=\frac{\pi}{2} \tag{6.}$$

oder

$$\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}-1})=-\frac{\pi}{2}. \tag{7.}$$

Nimmt man endlich

$$a=a_{2\mathfrak{b}-1},\quad b=a_{2\mathfrak{a}},\quad c=a_{2\mathfrak{c}},\quad d=a_{2\mathfrak{c}+1},$$

und es ist entweder $\mathfrak{c}>\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}<\mathfrak{b}-1$, so giebt die Gleichung (3.) des § 1

$$\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0. \tag{8.}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{c}$ und summirt von $\mathfrak{m}=\mathfrak{c}$ bis $\mathfrak{m}=n$, so erhält man, wenn $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden ist,

$$\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}})=0. \tag{9.}$$

Denn wenn $\mathfrak{b}>\mathfrak{a}$ ist, so ist jedes Glied, das bei der Summation in Betracht kommt, nach (9.) gleich Null; wenn aber $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ ist, so sind nur diejenigen Glieder nicht gleich Null, welche man für $\mathfrak{m}=\mathfrak{b}-1$ und $\mathfrak{m}=\mathfrak{b}$ erhält; deren Summe aber ist in Folge der Gleichungen (5, 6, 7) ebenfalls gleich Null.

Setzt man in der Gleichung (9.) $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}+1$ und addirt alsdann zu ihr die Gleichung (5.), und bemerkt, dass $K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}+K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1}$, $J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}=\overline{J}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}+J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}+1}$ ist, so erhält man

$$\sum_{\mathfrak{a}}(K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}-J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})=\frac{\pi}{2}. \tag{10.}$$

§ 5.

Die Gleichungen (2, 4, 9, 10) des vorhergehenden §, welche hier noch einmal zusammengestellt werden mögen:

$$(1.) \qquad \sum_{a}(K_{a,\mathfrak{b}}J_{a,\mathfrak{c}}-J_{a,\mathfrak{b}}K_{a,\mathfrak{c}}) = 0,$$

$$(2.) \qquad \sum_{a}(K'_{a,\mathfrak{b}}J'_{a,\mathfrak{c}}-J'_{a,\mathfrak{b}}K'_{a,\mathfrak{c}}) = 0,$$

$$(3.) \qquad \sum_{a}(K_{a,\mathfrak{b}}J'_{a,\mathfrak{c}}-J_{a,\mathfrak{b}}K'_{a,\mathfrak{c}}) = 0, \text{ wenn } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b},$$

$$(4.) \qquad \sum_{a}(K_{a,\mathfrak{b}}J'_{a,\mathfrak{b}}-J_{a,\mathfrak{b}}K'_{a,\mathfrak{b}}) = \frac{\pi}{2},$$

enthalten eine Reihe von $(2n^2-n)$ Relationen unter den $4n^2$ Grössen $K_{a,\mathfrak{b}}$, $J_{a,\mathfrak{b}}$, $K'_{a,\mathfrak{b}}$, $J'_{a,\mathfrak{b}}$. Die erste Gleichung nämlich, deren linke Seite identisch gleich Null wird, wenn man $\mathfrak{c}=\mathfrak{b}$ nimmt, und nur ihr Zeichen wechselt, wenn diese beiden Indices unter einander vertauscht werden, giebt $\frac{n(n-1)}{2}$ Relationen; eben so viele die zweite; die dritte aber giebt deren $n(n-1)$, und die vierte n, alle zusammen also enthalten $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)+n = 2n^2-n$ Relationen.

Ich werde jetzt aus diesen Relationen noch einige andere herleiten, welche bei den in der Einleitung angedeuteten Reihen-Entwickelungen der Abel'schen Transcendenten gebraucht werden.

Es bezeichne G die Determinante des Systems

$$\begin{matrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n}, \end{matrix}$$

und $\overline{G}_{a,\mathfrak{b}}$ den Coefficienten von $K_{a,\mathfrak{b}}$ in dem Ausdrucke von G, so ist, wenn

$$(5.) \qquad G_{a,\mathfrak{b}} = \frac{\overline{G}_{a,\mathfrak{b}}}{G}$$

gesetzt wird,

$$(6.) \qquad \sum_{a} G_{a,\mathfrak{b}}K_{a,\mathfrak{c}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b}, \\ 1, & \text{wenn } \mathfrak{c} = \mathfrak{b}, \end{cases}$$

$$(7.) \qquad \sum_{\mathfrak{c}} G_{a,\mathfrak{c}}K_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{b} \gtrless a, \\ 1, & \text{wenn } \mathfrak{b} = a. \end{cases}$$

Nun hat man (Gl. 1.)

$$\sum_{\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{c},m}J_{\mathfrak{c},n} = \sum_{\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{c},n}J_{\mathfrak{c},m},$$

also

$$\sum_{m,\mathfrak{c},n} G_{a,m}G_{\mathfrak{b},n}K_{\mathfrak{c},m}J_{\mathfrak{c},n} = \sum_{n,\mathfrak{c},m} G_{a,m}G_{\mathfrak{b},n}K_{\mathfrak{c},n}J_{\mathfrak{c},m}.$$

Summirt man auf beiden Seiten in Bezug auf die einzelnen Indices in der Ordnung, in welcher sie unter dem Summenzeichen geschrieben stehen, so erhält man mit Hülfe der Gleichung (7.)

$$\sum_{\mathfrak{n}} G_{\mathfrak{b},\mathfrak{n}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} J_{\mathfrak{b},\mathfrak{m}}. \tag{8.}$$

Setzt man daher

$$\sum_{\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} = F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \tag{9.}$$

so ist

$$F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = F_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}. \tag{10.}$$

Multiplicirt man die Formel $G_{\mathfrak{c},\mathfrak{n}} J_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}$ mit $K_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$ und summirt dann in Bezug auf $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{n}$, so findet man mit Hülfe der Gleichungen (9, 6)

$$J_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}. \tag{11.}$$

Ferner ist (Gl. 3, 4)

$$\sum_{\mathfrak{m}} (K_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} J'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} - J_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{b}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } \mathfrak{c} = \mathfrak{b}, \end{cases}$$

daher

$$\sum_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} (K_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} J'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} - J_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}) = \frac{\pi}{2} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Aber

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} K_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} J'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} = J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} J_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} F_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}},$$

also

$$J'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \frac{\pi}{2} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{\mathfrak{c}} F_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}. \tag{12.}$$

Endlich ist (Gl. 2.)

$$\sum_{\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}},$$

und daher, wenn man $J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}$ und $J'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$ vermittelst der Formel (12.) ausdrückt, indem man das eine Mal $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und das andere Mal $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}$ für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ schreibt, und bemerkt, dass

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}} F_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}} K'_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} K'_{\mathfrak{m},\mathfrak{b}}$$

ist, weil man auf der rechten Seite dieser Gleichung $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{c}$ mit einander vertauschen und dann wieder $F_{\mathfrak{m},\mathfrak{c}}$ für $F_{\mathfrak{c},\mathfrak{m}}$ setzen darf,

$$\sum_c G_{c,a} K'_{c,b} = \sum_c G_{c,b} K'_{c,a}. \tag{13.}$$

Diese Gleichung ist besonders bemerkenswerth, weil in ihr nur Abel'sche Integrale der ersten Gattung vorkommen.

Bezeichnet man den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung durch $H_{a,b}$, wo dann

$$H_{a,b} = H_{b,a} \tag{14.}$$

ist, so erhält man noch

$$K'_{a,b} = \sum_c H_{c,a} K_{c,b}. \tag{15.}$$

Durch die hier entwickelten Formeln wird übrigens auch der Beweis geliefert, dass die $(2n^2-n)$ Gleichungen (1, 2, 3, 4) unabhängig von einander sind, d. h. dass keine von ihnen eine Folge der übrigen ist. Dies wird der Fall sein, wenn sich sämmtliche in denselben vorkommende $4n^2$ Grössen durch $(2n^2+n)$ andere, willkürlich angenommene, ausdrücken lassen.

Nimmt man nun aber die n^2 Grössen $K_{a,b}$ willkürlich, die durch $F_{a,b}$, $H_{a,b}$ bezeichneten aber so an, dass den Bedingungs-Gleichungen (10, 14) Genüge geschieht, und drückt dann durch diese Grössen, deren Anzahl $(2n^2+n)$ ist, vermittelst der Formeln (11, 12, 15) $J_{a,b}$, $J'_{a,b}$, $K'_{a,b}$ aus, und substituirt die so erhaltenen Ausdrücke derselben in die Gleichungen (1, 2, 3, 4), so überzeugt man sich mit Hülfe der Relationen (6, 7) leicht, dass in jeder dieser Gleichungen die linke Seite identisch gleich Null wird.

Es ist bei den vorstehenden Entwickelungen ausdrücklich angenommen worden, dass $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$, die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, sämmtlich reell und ihrer Grösse nach geordnet seien. Gleichwohl behalten die gewonnenen Resultate unverändert und ohne Ausnahme ihre Gültigkeit, wenn auch diese Bedingungen nicht erfüllt sind; es bedarf alsdann nur einer geeigneten Modification der in § 1 getroffenen Bestimmungen hinsichtlich der Aufeinanderfolge der genannten Wurzeln und der Festsetzung desjenigen Werthes von $\sqrt{R(x)}$, der bei jeder einzelnen Integration genommen werden muss. Ich kann jedoch, des beschränkten Raumes wegen, in nähere Erörterungen über diesen Gegenstand nicht eingehen. Ebenso muss ich es mir versagen, über den in der Einleitung erwähnten Gebrauch der entwickelten Re-

lationen auch nur andeutungsweise etwas Näheres anzugeben. Ich begnüge mich schliesslich — besonders um darauf hinzuweisen, dass auch die zuletzt gegebenen Entwicklungen nicht ohne Bedeutung sind — den allgemeinen Ausdruck der Hülfsfunctionen hinzustellen, auf welche die Abel'schen Transcendenten zurückgeführt werden können.

Es seien $t_1, t_2, \dots t_n$ unbeschränkt veränderliche Grössen; $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$, $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ ganze Zahlen, von denen jede entweder gleich 0, oder gleich 1 zu nehmen ist, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ veränderliche ganze Zahlen, deren jede unabhängig von den übrigen jeden zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ enthaltenen Werth annehmen kann; man bezeichne ferner $\pi H_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ durch $\vartheta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, $\frac{\pi}{2} G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ durch $\eta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, und bilde die unendliche Reihe

$$\mathrm{S} e^{\Sigma(-\vartheta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\alpha_{\mathfrak{a}}-\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(\alpha_{\mathfrak{b}}-\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{b}})+(\alpha_{\mathfrak{a}}-\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{a}})(t_{\mathfrak{a}}+\mu_{\mathfrak{a}}\pi)i)},$$

wo sich das Summenzeichen Σ auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, S aber auf $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ bezieht. Bezeichnet man die durch diese Reihe dargestellte Function von $t_1, t_2, \dots$ durch $\mathrm{Hl}(t_1, t_2, \dots t_n)$, so hat dieselbe je nach den verschiedenen Werthen, die man den Zahlen $\mu_{\mathfrak{a}}, \nu_{\mathfrak{a}}$ geben kann, 4^n verschiedene Formen, welche den Jacobischen Θ-Functionen, in welche sie für $n = 1$ übergehen, durchaus analog sind. Führt man nun statt $t_1, t_2, \dots$ die Argumente $u_1, u_2, \dots$ ein, indem man

$$t_{\mathfrak{a}} = \eta_{1,\mathfrak{a}} u_1 + \eta_{2,\mathfrak{a}} u_2 + \dots + \eta_{n,\mathfrak{a}} u_n$$

setzt, so erhält man die erwähnten Hülfsfunctionen von $u_1, u_2, \dots u_n$, durch welche die von mir eingeführten Functionen $\mathrm{sn}(u_1, u_2, \dots)_{\mathfrak{a}}$, $\mathrm{cn}(u_1, u_2, \dots)_{\mathfrak{a}}$, $\mathrm{dn}(u_1, u_2, \dots)$, und noch mehrere andere, mit diesen im Zusammenhange stehende, ausgedrückt werden können und zwar eine jede als ein Quotient zweier derselben. Das Nähere hierüber gedenke ich in der erforderlichen Ausführlichkeit in einem grössern Werke zu geben, welches ausser allgemeinen Untersuchungen über die Integrale algebraischer Functionen insbesondere die Grundzüge einer umfassenden Theorie der Abel'schen Transcendenten enthalten soll.

Braunsberg, 17. Juli 1849.

ZUR THEORIE DER ABEL'SCHEN FUNCTIONEN.

(Aus dem Crelle'schen Journal, Bd. 47.)

Seit mehreren Jahren mit der Theorie der Abel'schen Transcendenten mich beschäftigend, bin ich zu Ergebnissen gelangt, welche der Beachtung der Mathematiker nicht unwerth zu sein scheinen, und die ich in einer Reihe von Abhandlungen ausführlich zu entwickeln beabsichtige. Die erste dieser Abhandlungen, welche bereits vollständig ausgearbeitet ist, soll hauptsächlich die Aufgabe behandeln, die periodischen Functionen mehrerer Argumente, deren Grund-Eigenschaften, wie es zuerst Jacobi nachgewiesen hat, in dem Abel'schen Theorem über die hyper-elliptischen Integrale ausgesprochen sind, wirklich darzustellen; was dasselbe Problem ist, welches für die Functionen zweier Argumente bereits von Göpel und Rosenhain mit glänzendem Erfolge gelöset ist, hier aber ganz allgemein erledigt wird; auf einem Wege, der nicht nur gänzlich verschieden ist von dem, welchen die genannten Mathematiker eingeschlagen haben, sondern auch, wie ich schon jetzt behaupten darf, die Aussicht giebt, dass er für noch höhere Transcendenten zu ähnlichen Resultaten führen werde. Das Folgende ist eine kurze Uebersicht meiner Arbeit.

1.

Dem Systeme der Integralgleichungen, von welchem man, nach Jacobi, bei der Theorie der Abel'schen Transcendenten ausgehen muss, gebe ich folgende Form, welche ich als die einfachste und für die Behandlung geeignetste erkannt habe. Es sei

$$R(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2n})$$

eine ganze Function $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grades; wobei ich zunächst annehme, es seien die Grössen $a_0, a_1, \ldots a_{2n}$ sämmtlich reell und so geordnet, dass

$$a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_{2n}$$

ist.

Ich zerlege nun $R(x)$ in die zwei Factoren

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_{2n-1}) \quad \text{und} \quad Q(x) = (x-a_0)(x-a_2)\ldots(x-a_{2n}),$$

und stelle, indem ich $u_1, u_2, \ldots u_n$ als unbeschränkt veränderliche Grössen, $x_1, x_2, \ldots x_n$ aber als Functionen derselben betrachte, den Zusammenhang zwischen diesen $2n$ Veränderlichen durch nachstehende n Gleichungen dar:

$$(1.)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x-a_1}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\\
u_2 &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x-a_3}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n &= \int_{a_1}^{x_1} \frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \int_{a_3}^{x_2} \frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}} + \cdots + \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P(x)}{x-a_{2n-1}}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{R(x)}}.
\end{aligned}\right.$$

Nun begründe ich, mit Hülfe des Abel'schen Theorems, ausführlich den der Hauptsache nach bereits von Jacobi ausgesprochenen Satz, welchen ich als Fundament der ganzen Theorie betrachte; nämlich, dass zwar für gegebene Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$ unendlich viele verschiedene Werthe haben, umgekehrt aber, wenn $u_1, u_2, \ldots u_n$ gegeben sind, die Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$, so wie auch die zugehörigen Werthe von $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots \sqrt{R(x_n)}$, völlig bestimmt sind. Und zwar sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten völlig bestimmte eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \ldots u_n$ sind, während eine zweite ganze Function von x, deren Coefficienten eben solche Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ sind, für $x = x_1, x_2, \ldots x_n$ die zugehörigen Werthe von $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots \sqrt{R(x_n)}$ giebt.

Hiernach kann jeder symmetrische rationale Ausdruck von $x_1, x_2, \ldots x_n$ als eine eindeutige Function von $u_1, u_2, \ldots u_n$ betrachtet werden. Namentlich

aber zeigt es sich, dass

$$(a_\alpha - x_1)(a_\alpha - x_2)\dots(a_\alpha - x_n),$$

(wo α eine der Zahlen $0, 1, \dots 2n$ bedeutet) das Quadrat einer solchen Function ist. Ich bezeichne demgemäss, indem ich die grösseste in $\frac{1}{2}\alpha$ enthaltene Zahl durch $\bar{\alpha}$ ausdrücke und

$$(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) = L(x)$$

setze,

$$(2.) \qquad \frac{\sqrt{(-1)^{\bar{\alpha}} L(a_\alpha)}}{\sqrt[4]{(-1)^\alpha R'(a_\alpha)}} \quad \text{durch} \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_n)_\alpha$$

und nenne diese so definirten $(2n+1)$ Grössen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_1$ u. s. w. Abel'sche Functionen, indem sie es sind, die den elliptischen Functionen $\sin\mathrm{am}\, u$, $\Delta\,\mathrm{am}\, u$ vollkommen entsprechen. In Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \dots u_n$ entwickelt, haben sie folgende Gestalt:

$$(3.) \qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_{2\mathfrak{a}-1} = \sqrt[4]{\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}} \cdot \{u_\mathfrak{a} + (u_1, u_2, \dots)_3 + (u_1, u_2, \dots)_5 + \dots\},$$

$$(4.) \qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_{2\mathfrak{b}} = \sqrt[4]{\frac{P(a_{2\mathfrak{b}})}{Q'(a_{2\mathfrak{b}})}} \cdot \{1 + (u_1, u_2, \dots)_2 + (u_1, u_2, \dots)_4 + \dots\}.$$

In diesen Formeln bedeutet $\mathfrak{a}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots n$; $\mathfrak{b}$ irgend eine der Zahlen $0, 1, \dots n$; und durch $(u_1, u_2, \dots)_\alpha$ wird eine ganze homogene Function α^{ten} Grades von $(u_1, u_2, \dots u_n)$ bezeichnet. Ich bemerke überhaupt, dass im Folgenden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, so wie auch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$ eine der Zahlen $1, 2, \dots n$; $\mathfrak{b}$ dagegen eine der Zahlen $0, 1, \dots n$ bedeuten soll. Ferner ist zu bemerken, dass überall, wo, hier und im Folgenden, die Wurzel (2^{ten} oder 4^{ten} Grades) eines positiven, aus den Differenzen $a_0 - a_1$, $a_0 - a_2$, $\dots$ $a_1 - a_2$, $a_1 - a_3$ u. s. w. durch Multiplication und Division gebildeten Ausdrucks vorkommt, stets deren positiver Werth genommen werden soll.

Die vorstehenden Reihen können nicht für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots$ convergent sein. Gleichwohl gehe ich von ihnen aus, indem ich die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_\alpha$ zunächst nur für solche Werthe von $u_1, u_2, \dots$ definire, für welche die aufgestellten Reihen sämmtlich convergiren. Darauf entwickle ich die Haupt-Eigenschaft der so erklärten Functionen: nämlich, dass sich die Werthe derselben, wenn an die Stelle von $u_1, u_2, \dots$ zweitheilige Grössen $u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots$ treten, rational durch $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots)_1$, $\dots$

$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2n}$; $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_1$, $\ldots$ $\mathrm{al}(v_1, v_2, \ldots)_{2n}$ und durch deren partielle Differential-Coefficienten erster Ordnung ausdrücken lassen; worauf ich dann mit Hülfe der so gefundenen Formeln zeige, dass es eindeutige, für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ existirende Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ giebt, die mit den durch die obigen Reihen dargestellten Functionen für solche Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ übereinstimmen, für welche dieselben convergiren, und die ich dann fortan unter $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$, $\ldots$ verstehe. Dies vorausgesetzt, sind die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$, welche für beliebige Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Gleichungen (1.) befriedigen, die n Wurzeln der folgenden Gleichung:

$$(5.)\quad \frac{e_1^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_1}{a_1 - x} + \frac{e_3^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_3}{a_3 - x} + \cdots + \frac{e_{2n-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2n-1}}{a_{2n-1} - x} = 1,$$

in welcher

$$\sqrt{\frac{-Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}} = e_{2\mathfrak{a}-1}$$

gesetzt ist. Ferner hat man:

$$(6.)\quad \sqrt{R(x_\mathfrak{a})} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \left\{ \frac{e_{2\mathfrak{b}-1}^2\, P(x_\mathfrak{a})\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}-1}}{a_{2\mathfrak{b}-1} - x_\mathfrak{a}} \cdot \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{b}-1}}{\partial u_\mathfrak{c}} \right\}.$$
$$\mathfrak{b}, \mathfrak{c} = 1, 2, \ldots n$$

Uebrigens lassen sich statt der Formeln (5, 6) andere von ganz ähnlicher Gestalt aufstellen, in welchen n beliebige von den Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_1$, $\ldots$ vorkommen. Indem man ferner die Differentiale dieser Functionen durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausdrückt, findet man Veranlassung, noch eine Reihe anderer Functionen einzuführen; nämlich die durch die Formel

$$(7.)\quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta} = \sqrt{\pm(a_\alpha - a_\beta)} \cdot \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\beta \cdot \sum_\mathfrak{a} \left\{ \frac{\sqrt{R(a_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a} - a_\alpha)(x_\mathfrak{a} - a_\beta) L'(x_\mathfrak{a})} \right\}$$

dargestellten, wo das obere oder das untere Zeichen von $(a_\alpha - a_\beta)$ gilt, jenachdem $\alpha < \beta$ oder $\alpha > \beta$ ist. (α, β bedeuten je zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, $\ldots$ $2n$.) Man hat alsdann

$$(8.)\quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_\mathfrak{a}} = -\frac{e_{2\mathfrak{a}-1}^2}{\sqrt{\pm(a_\alpha - a_{2\mathfrak{a}-1})}} \cdot \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\mathfrak{a}-1}\, \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha, 2\mathfrak{a}-1},$$

vorausgesetzt, dass $\alpha \gtrless 2\mathfrak{a} - 1$ ist. Aus dieser Gleichung ergiebt sich die be-

merkenswerthe Relation

$$(9.)\qquad e_{2a-1}^2 \frac{\partial \operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2a-1}}{\partial u_c} = e_{2c-1}^2 \frac{\partial \operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}}{\partial u_a}.$$

Zwischen den Functionen $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$, $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$ finden übrigens zahlreiche Relationen Statt. Insbesondere sind folgende zu bemerken:

$$(10.)\qquad \frac{\operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2b}}{e_{2b}^2} = 1 - \sum_{a=1,\ldots n}\left\{\frac{e_{2a-1}^2 \operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2a-1}}{a_{2b} - a_{2a-1}}\right\},$$

$$(11.)\qquad \pm \frac{\operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2b,2c-1}}{e_{2b-1}^2} = \operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1} + \frac{e_{2c-1}^2}{a_{2b} + a_{2c-1}}$$
$$+ \sum_{a=1,\ldots c-1}\left\{\frac{e_{2a-1}^2 \operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2a-1,2c-1}}{a_{2b} - a_{2a-1}}\right\} - \sum_{a=c+1,\ldots n}\left\{\frac{e_{2a-1}^2 \operatorname{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2a-1,2c-1}}{a_{2b} - a_{2a-1}}\right\}.$$

In der letzteren Gleichung gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem $2c-1$ kleiner oder grösser als $2b$ ist. Mittels der Gleichungen (8.) bis (11.) lässt sich auch eine algebraische Gleichung zwischen jedem der $(2n+1)n$ Differential-Coefficienten erster Ordnung der Functionen $\operatorname{al}(u_1, u_1, \ldots)_\alpha$ und je n der letztern ableiten.

2.

Nunmehr führe ich diejenigen Grössen ein, welche den sogenannten vollständigen elliptischen Integralen erster Art analog sind. Wenn x reell ist und zwischen den Grenzen $a_{\alpha-1}$ und a_α liegt, so ist

$$R(x) = (-1)^\alpha (a_0 - x)\ldots(a_{\alpha-1} - x)(x - a_\alpha)\ldots(x - a_{2n}),$$

und man kann daher

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^\alpha \sqrt{a_0 - x}\ldots\sqrt{a_{\alpha-1} - x}.\sqrt{x - a_\alpha}\ldots\sqrt{x - a_{2n}}$$

setzen, wo die Wurzeln rechts sämmtlich positiv zu nehmen sind.

Ferner ist, wenn x zwischen $+\infty$ und a_0 liegt:

$$\sqrt{R(x)} = \pm\sqrt{x - a_0}\ldots\sqrt{x - a_{2n}},$$

und wenn x zwischen a_{2n} und $-\infty$ enthalten ist:

$$\sqrt{R(x)} = \pm i^{2n+1}\sqrt{a_0 - x}\ldots\sqrt{a_{2n} - x}.$$

Wenn nun a und b zwei reelle Grössen sind, so bezeichne ich durch

$$\int_a^{\bar{b}} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wo $F(x)$ eine rationale Function von x bedeuten soll, denjenigen besonderen Werth der Formel $\int_a^b \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$, welchen sie dadurch erhält, dass bei der Integration $\sqrt{R(x)}$ stets mittels der obigen Formeln unter Anwendung des obern Zeichens bestimmt wird. Dies vorausgesetzt, werde

$$\int_{a_\alpha}^{\bar{\infty}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\alpha-1})\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \overset{\alpha}{K}_\alpha$$

bezeichnet. Dann gilt die Relation:

$$(12.) \qquad \overset{0}{K}_\alpha - \overset{1}{K}_\alpha + \overset{2}{K}_\alpha - \cdots + \overset{2n}{K}_\alpha = 0, \text{ für } \alpha = 1, 2, \ldots n.$$

Ferner sei

$$(13.) \quad K_{\alpha,\gamma} = \overset{2\gamma-1}{K}_\alpha - \overset{2\gamma}{K}_\alpha = \int_{a_{2\gamma-1}}^{\bar{a}_{2\gamma}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\alpha-1})\sqrt{R(x)}} = -\int_{a_{2\gamma-1}}^{a_{2\gamma}} \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}} \cdot \frac{dx}{2(a_{2\alpha-1}-x)}$$

$$i\overline{K}_{\alpha,\gamma} = \overset{2\gamma-2}{K}_\alpha - \overset{2\gamma-1}{K}_\alpha = \int_{a_{2\gamma-2}}^{\bar{a}_{2\gamma-1}} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2\alpha-1})\sqrt{R(x)}},$$

also

$$(14.) \qquad \overline{K}_{\alpha,\gamma} = -\int_{a_{2\gamma-2}}^{a_{2\gamma-1}} \sqrt{\frac{-P(x)}{Q(x)}} \frac{dx}{2(x-a_{2\alpha-1})},$$

wo bei der ersten Integration $\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$, und bei der andern $\sqrt{\frac{-P(x)}{Q(x)}}$ positiv zu nehmen ist. Dann findet sich

$$(15.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{0}{K}_\alpha = K_{\alpha,1} + K_{\alpha,2} + \cdots + K_{\alpha,n} \\ K_\alpha = K_{\alpha,1} + K_{\alpha,2} + \cdots + K_{\alpha,n} - i\overline{K}_{\alpha,1} \\ \overset{2}{K}_\alpha = K_{\alpha,2} + K_{\alpha,3} + \cdots + K_{\alpha,n} - i\overline{K}_{\alpha,1} \\ \overset{3}{K}_\alpha = K_{\alpha,2} + K_{\alpha,3} + \cdots + K_{\alpha,n} - i\overline{K}_{\alpha,1} - i\overline{K}_{\alpha,2} \\ \overset{4}{K}_\alpha = K_{\alpha,3} + K_{\alpha,4} + \cdots + K_{\alpha,n} - i\overline{K}_{\alpha,1} - i\overline{K}_{\alpha,2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overset{2n}{K}_\alpha = -i\overline{K}_{\alpha,1} - i\overline{K}_{\alpha,2} - \cdots - i\overline{K}_{\alpha,n}. \end{array} \right.$$

Ein besonderer Fall des Abel'schen Theorems führt sodann zu den folgenden Relationen, in welchen α, β, γ Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, ... $2n$ bedeuten, und mit dem Symbol $\alpha|\beta$ die Zahl Null bezeichnet wird, wenn $\alpha < \beta$, hingegen die Zahl 1, wenn $\alpha > \beta$ ist:

$$(16.)\quad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha-2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha}, \qquad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha-2\bar{\alpha}}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha},$$

$$(17.)\quad \mathrm{al}(u_1 + \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta}, \qquad \mathrm{al}(u_1 - \overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = \frac{-i^{\beta|\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta}.$$

Hieraus lässt sich

$$(18.)\quad \begin{cases} \mathrm{al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1, \ldots)_\alpha = +\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha \\ \mathrm{al}(u_1 + 2\overset{\beta}{K}_1, \ldots)_\alpha = -\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha, \text{ wenn } \beta \gtrless \alpha, \end{cases}$$

und wenn man

$$K_a = \mu_a K_a' + \mu_1 \overset{1}{K}_a + \cdots + \mu_{2n} \overset{2n}{K}_a,$$
$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_{2n}$$

setzt, wo unter μ_0, μ_1 u. s. w. beliebige ganze Zahlen zu verstehen sind,

$$(19.)\quad \mathrm{al}(u_1 + 2K_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mu-\mu_\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$$

folgern.

Es werde jetzt

$$(20.)\quad K'_{a,c} = \overline{K}_{a,1} + \overline{K}_{a,2} + \cdots + \overline{K}_{a,c}$$

und

$$(21.)\quad \begin{cases} \omega_a = \mathfrak{m}_1 K_{a,1} + \mathfrak{m}_2 K_{a,2} + \cdots + \mathfrak{m}_n K_{a,n}, \\ \omega'_a = \mathfrak{n}_1 K'_{a,1} + \mathfrak{n}_2 K'_{a,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{a,n}, \end{cases}$$

gesetzt (unter $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ ebenfalls beliebige ganze Zahlen verstanden), so erhält man die Formeln

$$(22.)\quad \mathrm{al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{m}_\alpha - \bar{\alpha}}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

wo, wenn $\alpha = 0$ ist, $\mathfrak{m}_0 = 0$ genommen werden muss; und

$$(23.)\quad \mathrm{al}(u_1 + 2\omega'_1 i, \ldots)_\alpha = (-1)^{\mathfrak{n}_n + \mathfrak{n}_{n-1} + \cdots + \mathfrak{n}_{\bar{\alpha}+1}}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha,$$

in welcher Formel für $\alpha = 2n$ der Factor von $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{2n}$ gleich 1 zu setzen ist. Ähnliche Relationen erhält man mit Hülfe der Formel (17.) für die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$.

3.

Die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ haben die Eigenthümlichkeit, dass sie sämmtlich für dieselben Beträge von $u_1, u_2, \ldots$ unendlich werden. Überdies kann jede derselben, wie es bei dem Beweise des in No. 1 angegebenen Hauptsatzes gezeigt wird, (wenn man für die absoluten Beträge von $u_1, u_2, \ldots$ bestimmte, übrigens beliebig weite Grenzen festsetzt, die sie nicht überschreiten sollen), als der Quotient zweier, nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$ fortschreitenden Reihen dargestellt werden, welche für alle Werthe dieser Veränderlichen innerhalb der bezeichneten Grenzen convergiren. Dies führt zu der Vermuthung, dass sich $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$, u. s. w. als Brüche mit gemeinschaftlichem Nenner darstellen lassen dürften, bei welchen dieser Nenner sowohl als die Zähler solche Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ sind, die nie unendlich werden und sich nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen. Wenn sich wirklich $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}$ setzen lässt (unter p, p_α Functionen von der eben beschriebenen Art verstanden), so muss $d \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ aus zwei Theilen bestehen, deren einer für alle die Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ unendlich wird, für welche $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = 0$ ist, der andere hingegen für alle diejenigen, welche $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ unendlich machen. Dasselbe ist der Fall für die höheren logarithmischen Differentiale von $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$. Angenommen nun, es ergebe sich

$$d^\mu \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = P_\alpha - P,$$

wo $P_\alpha = \infty$ wird, wenn $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = 0$, und $P = \infty$, wenn $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \infty$, so kann man $d^\mu \log p_\alpha = P_\alpha$, $d^\mu \log p = P$ setzen; und da sich P_α, P durch $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$ u. s. w. ausdrücken lassen, also auch durch $p_0, p_1, \ldots p_{2n}, p$, so muss man auf diese Weise zu $2n+2$ Differential-Gleichungen für die genannten $2n+2$ Grössen gelangen.*)

Für die elliptischen Functionen ist die anzustellende Rechnung sehr leicht. Man hat nämlich, wenn $x = \mathrm{sin\,am}\, u$ ist:

$$\frac{d^2 \log x}{du^2} = k^2 x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Setzt man nun $x = \frac{p_1}{p}$, so ergiebt sich

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} - \frac{d^2 \log p}{du^2} = k^2 \cdot \frac{p_1^2}{p^2} - \frac{p^2}{p_1^2}.$$

Diese Gleichung zerfälle man in zwei, indem man

$$\frac{d^2 \log p_1}{du^2} = -\frac{p^2}{p_1^2}, \qquad \frac{d^2 \log p}{du^2} = -\frac{k^2 p_1^2}{p^2}$$

setzt. Nachdem nun vorher gezeigt worden, dass sich $\sin\mathrm{am}\, u$, wenn der absolute Betrag von u eine beliebig angenommene Grenze nicht übersteigt, als Quotient zweier, nach ganzen Potenzen von u fortschreitenden und für alle unterhalb jener Grenze liegenden Werthe dieser Veränderlichen convergenten Reihen darstellen lässt, kann strenge bewiesen werden, dass sich die durch die beiden vorstehenden Differential-Gleichungen definirten Functionen p, p_1 nach ganzen positiven Potenzen von u in beständig (d. h. für alle reellen und imaginären Werthe von u) convergirende Reihen entwickeln lassen. Und wenn man die vier willkürlichen Constanten, die sie enthalten, so bestimmt, dass für $u = 0$

$$p = 1, \qquad \frac{dp}{du} = 0, \qquad p_1 = 0, \qquad \frac{dp_1}{du} = 1$$

ist, so findet sich in der That $\sin\mathrm{am}\, u = \frac{p_1}{p}$. Ähnliche Entwicklungen giebt es für $\cos\mathrm{am}\, u$, $\Delta\,\mathrm{am}\, u$, und man gelangt auf diese Weise zu denjenigen Darstellungen der elliptischen Functionen, deren Abel in einem Briefe an Legendre (S. Crelle's Journal, B. 4, S. 244; vgl. B. 6, S. 76) erwähnt, ohne jedoch irgendwo die Ausführung, oder eine Andeutung seines Verfahrens gegeben zu haben. Von den Functionen p, p_1 aus gelangt man ferner leicht zu den Jacobi'schen Functionen $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$, und kann so die Entwicklung der elliptischen Functionen in allen Formen ausführen, ohne dieselbe auf die Transformations- oder Multiplications-Formeln zu gründen. Überhaupt lassen sich die obigen Differential-Gleichungen für p, p_1 zur Basis einer vollständigen Theorie der elliptischen Transcendenten machen; wie ich dies in einer bereits im Jahre 1840 von mir verfassten und damals der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Münster übergebenen Abhandlung auch wirklich durchgeführt habe.

Für die Functionen $\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ habe ich nun eine ähnliche Rechnung versucht. Mit Hülfe der in Nr. 1 erwähnten Formeln, mittels welcher man $\mathrm{al}(u_1 + v_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1 + v_1, \ldots)_1$ u. s. w. durch die Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ und $v_1, v_2, \ldots v_n$ ausdrücken kann, lassen sich die zweiten Differentiale der Abel'schen Functionen ermitteln, und man erhält $d^2 \log \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ durch

$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$ u. s. w. und deren erste Differentiale ausgedrückt. Mit Benutzung der unter (8.) bis (11.) aufgestellten Relationen lassen sich dann diese Ausdrücke auf die vorhin angegebene Form bringen, und indem man

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = \frac{p_\alpha}{p}, \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta} = \frac{p_{\alpha,\beta}}{p}$$

setzt, für die Grössen $p, p_\alpha, p_{\alpha,\beta}$ eine hinreichende Anzahl Differential-Gleichungen zweiter Ordnung finden; so wie es sich auch nachweisen lässt, dass die so definirten Functionen sich nach ganzen Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$ in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen. Auf diese Weise begründete ich (gegen Ende 1847) den Satz, welchen ich als den wichtigsten zur Erreichung meines Zieles, eine für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ geltende Darstellung der Abel'schen Functionen aufzufinden, betrachten durfte: dass nämlich die Functionen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta}$ in der Form von Brüchen mit gemeinschaftlichem Nenner sich darstellen lassen, in welchen die Zähler und der Nenner wesentlich den Character ganzer Functionen haben, indem sie für alle (reellen und imaginären) Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots$ existiren und sich nach ganzen positiven Potenzen derselben in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen. Indem ich nun ferner auf die so gewonnenen Hülfsfunctionen genau dasselbe Verfahren anwandte, welches mich von den oben erwähnten Functionen, durch welche ich die elliptischen Functionen ausgedrückt hatte, zu den sogenannten θ-Functionen geführt, gelangte ich auf einem, alle Willkürlichkeit ausschliessenden Wege, zu den ebenso einfachen als durch ihre Form ausgezeichneten Reihen, auf welche, für $n = 2$, schon vor mir Göpel und Rosenhain die Abel'schen Functionen zweier Argumente zurückgeführt hatten.

Die zur Erlangung der angegebenen Resultate erforderlichen Rechnungen sind indess nicht ohne Weitläufigkeit. Ich versuchte daher, denselben Grundgedanken verfolgend, auf einem einfacheren Wege den Zweck zu erreichen. Es gelang mir dies, indem ich gleich von Anfang an auch die Abel'schen Integrale zweiter und dritter Art mit in Betracht zog und dieselben durch $u_1, u_2, \ldots u_n$ ausdrückte; in ähnlicher Weise, wie es bei den entsprechenden elliptischen Integralen geschieht.

Göpel's Abhandlung erschien zu der Zeit, als ich mit diesen Untersuchungen beschäftigt war. Seine Resultate sowohl, als sein Verfahren, sind

nicht so einfach, als sie, auch bei dem von ihm gewählten Wege, sein konnten. Von Rosenhain's Arbeit, die erst nach Vollendung der meinigen veröffentlicht worden, kenne ich bis jetzt nur die in diesem Journal aus Briefen an Jacobi mitgetheilten Notizen. So viel daraus zu entnehmen, stimmen für den von ihm behandelten Fall ($n = 2$) seine Resultate mit den meinigen, auf durchaus verschiedenem Wege ermittelten, vollkommen überein. Ich glaube aber nicht, dass sich nach den Methoden beider Mathematiker die Abel'schen Functionen von höherer als der ersten Ordnung werden behandeln lassen. Jacobi hat bereits bemerkt, dass schon für $n = 3$ die verallgemeinerten θ-Functionen mehr wesentliche Constanten enthalten, als die Abel'schen Functionen dreier Argumente. Es müssen daher unter diesen Constanten bestimmte Bedingungsgleichungen stattfinden, wenn die betreffenden Reihen zu Abel'schen Functionen führen sollen. Ich habe nun zwar diese Relationen für jeden Werth von n gefunden, zweifle aber, ob dies, wenn man von den genannten Reihen ausgeht, a priori möglich sei, ohne dass die Theorie der Abel'schen Functionen, nach einer andern Methode entwickelt, vorausgesetzt wird.

4.

Es werde, während a eine willkürliche Grösse bedeutet,

$$(24.)\qquad \sum_{\alpha}\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\frac{P(x)}{x-a}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = \mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$$

gesetzt, indem man sich $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $u_1, u_2, \ldots u_n$ ausgedrückt vorstellt, und festsetzt, dass bei jeder einzelnen Integration x genau dieselben Werthe durchlaufen soll, wie bei den Integrationen in den Gleichungen (1.). So definirt, lässt sich $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ als eine logarithmische Function von $u_1, u_2, \ldots$ betrachten; d. h. als eine solche, welche die Form

$$A\log\varphi(u_1, u_2, \ldots) + \varphi_1(u_1, u_2, \ldots)$$

hat, wo φ, φ_1 eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \ldots$ sind. Von den vielen Formeln, die sich auf diese Function beziehen, führe ich nur die folgende an:

$$(25.)\quad \frac{\partial\,\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)}{\partial u_c} = \tfrac{1}{2}e_{2c-1}\,\mathrm{al}(\overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}\,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}\,[\mathrm{al}(u_1+\overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}+\mathrm{al}(u_1-\overset{c}{w}_1, \ldots)_{2c-1}]$$

$$= \frac{e_{2c-1}^2\sqrt{R(a)}}{(a-a_{2c-1})\,P(a)}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}}{1-\sum_{\alpha}\left\{\dfrac{e_{2\alpha-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2\alpha-1}}{a_{2\alpha-1}-a}\right\}},$$

wo

$$(26.) \qquad {}^{c}w_{a} = \int_{a_{2c-1}}^{a} \frac{P(x)\,dx}{2(x-a_{2a-1})\sqrt{R(x)}}$$

ist.

Das dem $\sum$ untergesetzte a bedeutet, dass in einer Formel wie $\sum_{a} A_{a}$ die Summation auf die veränderliche ganze Zahl a sich beziehe, welche dann alle Werthe von 1 bis n durchlaufen muss.

Setzt man nun

$$(27.) \qquad \frac{P(a)}{\sqrt{R(a)}} = b,$$

so lässt sich jedesmal, wenn a in der Nähe eines der Werthe $a_1, a_3, \ldots a_{2n-1}$ liegt, $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ nach Potenzen von b entwickeln.

Den Coefficienten von b in dieser Entwicklung, für den Fall, wo a wenig von a_{2a-1} verschieden ist, bezeichne ich durch

$$\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_a,$$

wo man dann

$$(28.) \qquad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \sum_{a}\left\{\frac{1}{2}\frac{Q(a_{2c-1})}{P'(a_{2c-1})}\frac{P(x_a)\,dx_a}{(x_a-a_{2c-1})^2\sqrt{R(x_a)}}\right\},$$

oder auch

$$(29.) \qquad d\,\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_c = \frac{e_{2c-1}^2\,du_c}{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2c-1}} + \sum_{a}{}'\left\{\frac{e_{2c-1}^2 e_{2a-1}^2\,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{2a-1}(du_c-du_a)}{(a_{2c-1}-a_{2a-1})\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots)_{2c-1}}\right\}$$

findet, in welcher letztern Formel für a der Werth c auszuschliessen ist.

Diese n neuen Grössen $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)_a$ sind eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \ldots$, von derselben Art wie $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$ u. s. w. Es lassen sich auf dieselben alle Abel'schen Integrale zweiter Art zurückführen; so wie auf $\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots)$ die der dritten.

Ich bezeichne jetzt das bestimmte Integral

$$(30.) \qquad \int_{a_\alpha}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{Q(a_{2a-1})}{P'(a_{2a-1})}\frac{P(x)}{(x-a_{2a-1})^2}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \text{durch} \quad \overset{\alpha}{J}_a,$$

und setze (ähnlich wie oben, wo von den Grössen $\overset{\alpha}{K}_a$ die Rede ist)

$$(31.) \qquad \begin{cases} J_{a,c} = \overset{2c-1}{J}_a - \overset{2c}{J}_a, \qquad i\bar{J}_{a,c} = \overset{2c-2}{J}_a - \overset{2c-1}{J}_a, \\ J'_{a,c} = \bar{J}_{a,1} + \bar{J}_{a,2} + \cdots + \bar{J}_{a,c}. \end{cases}$$

Dann lässt sich

$$\frac{\partial \log \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_\alpha}$$

durch die Functionen $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)_\alpha$ in folgender Weise ausdrücken:

$$(32.)\quad \frac{\partial \log \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\partial u_\alpha} = \overset{\alpha}{J}_\alpha - \mathrm{Sl}(u_1 + \overset{\alpha}{K}_1 - \overset{2\alpha-1}{K}_1, \ldots)_\alpha + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\alpha-1}{K}_1, \ldots)\ .$$

Nun lässt sich mit Hülfe der Formel (29.) leicht beweisen, dass

$$(33.)\quad \frac{\partial \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\alpha-1}{K}_1, \ldots)_\alpha}{\partial u_\gamma} = \frac{\partial \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\gamma-1}{K}_1, \ldots)_\gamma}{\partial u_\alpha}$$

ist, woraus folgt, dass der Ausdruck

$$\sum_\alpha \left\{ -\overset{2\alpha-1}{J}_\alpha - \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\alpha-1}{K}_1, \ldots)_\alpha \right\} du_\alpha$$

ein vollständiges Differential ist.

Es lässt sich daher eine Function $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$ dergestalt bestimmen, dass

$$(34.)\quad d \log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_\alpha \left\{ \overset{2\alpha-1}{J}_\alpha + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\alpha-1}{K}_1, \ldots) \right\} du_\alpha$$

ist, und wenn man dann

$$(34\,a.)\quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)}$$

setzt, so erhält man

$$(35.)\quad d \log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = -\sum_\alpha \left\{ \overset{2\alpha-1}{J}_\alpha - \overset{\alpha}{J}_\alpha + \mathrm{Sl}(u_1 - \overset{2\alpha-1}{J}_\alpha + \overset{\alpha}{J}_\alpha, \ldots)_\alpha \right\} du_\alpha .$$

Fügt man diesen Gleichungen die Bestimmung hinzu, dass für $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$ werde, so sind die sämmtlichen durch sie definirten Hülfsfunctionen völlig bestimmt. Entwickelt man sie in Reihen nach Potenzen von $u_1, u_2, \ldots$, so erhält man

$$(36.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \cdots \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\alpha-1} = \sqrt[4]{\dfrac{-Q(a_{2\alpha-1})}{P'(a_{2\alpha-1})}} \left\{ u_\alpha + (u_1, u_2, \ldots)_3 + (u_1, u_2, \ldots)_5 + \cdots \right\} \\ \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{2\beta} = \sqrt[4]{\dfrac{P(a_{2\beta})}{Q'(a_{2\beta})}} \left\{ 1 + (u_1, u_2, \ldots)_2 + (u_1, u_2, \ldots)_4 + \cdots \right\}, \end{cases}$$

und es lässt sich erweisen, dass diese Reihen für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ convergent sind.

Auf die Function $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)$ lassen sich jetzt auch $\mathrm{Sl}(u_1, \ldots)$ und $\mathrm{Sl}_\alpha(u_1, \ldots)_\alpha$ zurückführen. Setzt man nämlich

$$w_\alpha = \int_\alpha^\infty \frac{1}{2} \frac{P(x)\,dx}{(x-a_{2\alpha-1})\sqrt{R(x)}} \tag{37.}$$

und

$$\frac{\partial \log \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)}{\partial u_\alpha} = \overset{\alpha}{\mathrm{Al}}(u_1, u_2, \ldots), \tag{38.}$$

so hat man

$$\mathrm{Sl}(u_1, u_2, \ldots) = -\sum_\alpha u_\alpha \overset{\alpha}{\mathrm{Al}}(w_1, \ldots) + \frac{1}{2} \log \frac{\mathrm{Al}(u_1+w_1, \ldots)}{\mathrm{Al}(u_1-w_1, \ldots)}. \tag{39.}$$

Hieraus lässt sich noch eine Formel herleiten, die für $n = 1$ in der Theorie der elliptischen Functionen (namentlich bei Anwendungen derselben) von grossem Nutzen ist, nämlich:

$$e^{\sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{1}{2}\left(1+\frac{P(x)}{P(a)}\frac{\sqrt{R(a)}}{\sqrt{R(x)}}\right)\frac{dx}{x-a}} = e^{-\sum_\alpha u_\alpha \overset{\alpha}{\mathrm{Al}}(w_1, \ldots)} \cdot \frac{\mathrm{Al}(u_1+w_1, \ldots)}{\mathrm{Al}(w_1, \ldots)\,\mathrm{Al}(u_1, \ldots)}. \tag{40.}$$

Für $n = 1$ dient z. B. dieser Ausdruck dazu, um leicht zu den Formeln zu gelangen, durch welche Jacobi die Rotationsbewegung eines festen Körpers darzustellen gelehrt hat.

5.

Zur wirklichen Darstellung der Functionen $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)$, $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_\alpha$ gelange ich nunmehr auf folgende Weise.

Zunächst entwickle ich die Relation

$$\mathrm{Al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1, \ldots) = (-1)^\alpha e^{-2\sum_\alpha \overset{\alpha}{J}_\alpha (u_\alpha + \overset{\alpha}{K}_\alpha)} \cdot \mathrm{Al}(u_1, \ldots). \tag{41.}$$

In dieser Gleichung setze ich sodann $u_1 + 2\overset{\beta}{K}_1$ statt u_1 u. s. w. Dies giebt

$$\mathrm{Al}(u_1 + 2\overset{\alpha}{K}_1 + 2\overset{\beta}{K}_1, \ldots) = (-1)^{\alpha+\beta} e^{-2\sum_\alpha [(\overset{\alpha}{J}_\alpha + \overset{\beta}{J}_\alpha)(u_\alpha + \overset{\alpha}{K}_\alpha + \overset{\beta}{K}_\alpha) + \overset{\beta}{K}_\alpha \overset{\alpha}{J}_\alpha - \overset{\alpha}{K}_\alpha \overset{\beta}{J}_\alpha]} \cdot \mathrm{Al}(u_1, \ldots).$$

Vertauscht man jetzt α und β mit einander, so zeigt sich, dass

$$e^{2\sum_\alpha (\overset{\alpha}{K}_\alpha \overset{\beta}{J}_\alpha - \overset{\alpha}{J}_\alpha \overset{\beta}{K}_\alpha)} = e^{-2\sum_\alpha (\overset{\alpha}{K}_\alpha \overset{\beta}{J}_\alpha - \overset{\alpha}{J}_\alpha \overset{\beta}{K}_\alpha)}$$

sein muss. Hieraus folgt, dass

$$\sum_a (\overset{\alpha}{K}_a \overset{\beta}{J}_a - \overset{\alpha}{J}_a \overset{\beta}{K}_a) = \mu \cdot \tfrac{1}{2}\pi i$$

ist, wo μ eine ganze Zahl bedeutet. In der That finde ich durch eine directe Untersuchung der bestimmten Integrale, durch welche $\overset{\alpha}{K}_a$, $\overset{\beta}{K}_a$, $\overset{\alpha}{J}_a$, $\overset{\beta}{J}_a$ ausgedrückt werden:

$$(42.) \qquad \sum_a (\overset{\alpha}{K}_a \overset{\beta}{J}_a - \overset{\alpha}{J}_a \overset{\beta}{K}_a) = \begin{cases} +\frac{1}{2}\pi i, & \text{wenn } \alpha > \beta, \\ -\frac{1}{2}\pi i, & \text{wenn } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Aus dieser Relation leite ich dann die folgenden ab:

$$(43.) \qquad \begin{cases} \sum_a (K_{a,c} J_{a,c'} - J_{a,c} K_{a,c'}) = 0, \\ \sum_a (K'_{a,c} J'_{a,c'} - J'_{a,c} K'_{a,c'}) = 0, \\ \sum_a (K_{a,c} J'_{a,c'} - J_{a,c} K'_{a,c'}) = 0, \quad \text{wenn } c' \gtrless c, \\ \sum_a (K_{a,c} J'_{a,c} - J_{a,c} K'_{a,c}) = \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Diese Relationen, deren Anzahl gleich $(2n-1)n$ ist, entsprechen der bekannten Legendre'schen Gleichung zwischen den ganzen elliptischen Integralen erster und zweiter Art. Ich habe den Beweis derselben in einer Programm-Abhandlung (Braunsberg 1849) veröffentlicht, in welcher ich zugleich über die Resultate, zu welchen ich in der Theorie der Abel'schen Functionen gekommen bin, einige vorläufige Notizen gab, mit der Anzeige, dass ich diese Resultate in einer ausführlichen Schrift darzustellen gedenke; ein Vorhaben, dessen Verwirklichung durch eine Krankheit, die mehrere Jahre lang mich der Arbeit völlig entzog, bisher vereitelt wurde.

Mit Hülfe der aufgestellten Relationen kann man nun aus der Gleichung (41.) folgende zwei allgemeinere Gleichungen herleiten.

Es sei wieder

$$\begin{aligned} \omega_a &= \mathfrak{m}_1 K_{a,1} + \mathfrak{m}_2 K_{a,2} + \cdots + \mathfrak{m}_n K_{a,n} \\ \omega'_a &= \mathfrak{n}_1 K'_{a,1} + \mathfrak{n}_2 K'_{a,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{a,n} \end{aligned}$$

und

$$(44.) \qquad \begin{cases} \varepsilon_a = \mathfrak{m}_1 J_{a,1} + \mathfrak{m}_2 J_{a,2} + \cdots + \mathfrak{m}_n J_{a,n} \\ \varepsilon'_a = \mathfrak{n}_1 J'_{a,1} + \mathfrak{n}_2 J'_{a,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n J'_{a,n} \end{cases}$$

(unter $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ beliebige ganze Zahlen verstanden). Dann hat

man

$$(45.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = e^{-2\sum_a \varepsilon_a (u_a + \omega_a)} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots) \\ \mathrm{Al}(u_1 + 2\omega_1' i, \ldots) = e^{-2\sum_a \varepsilon_a' (u_a + \omega_a' i) i} . \mathrm{Al}(u_1, \ldots), \end{cases}$$

und erhält mittels (17.) ähnliche Formeln auch für $\mathrm{Al}(u_1, \ldots)_\alpha$.

Ich führe jetzt statt $u_1, u_2, \ldots u_n$ n andere Veränderliche $v_1, v_2, \ldots v_n$ ein, mittels der Gleichungen

$$(46.)\quad \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\pi}(K_{1,1} v_1 + K_{1,2} v_2 + \cdots + K_{1,n} v_n) \\ u_2 = \frac{1}{\pi}(K_{2,1} v_1 + K_{2,2} v_2 + \cdots + K_{2,n} v_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n = \frac{1}{\pi}(K_{n,1} v_1 + K_{n,2} v_2 + \cdots + K_{n,n} v_n). \end{cases}$$

Aus denselben mögen sich

$$(47.)\quad \begin{cases} v_1 = (G_{1,1} u_1 + G_{2,1} u_2 + \cdots + G_{n,1} u_n)\pi \\ v_2 = (G_{1,2} u_1 + G_{2,2} u_2 + \cdots + G_{n,2} u_n)\pi \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = (G_{1,n} u_1 + G_{2,n} u_2 + \cdots + G_{n,n} u_n)\pi \end{cases}$$

ergeben. Sodann leite ich aus den Gleichungen (43.) die folgenden ab:

$$(48.)\quad \sum_c G_{a,c} J_{a',c} = \sum_c G_{a',c} J_{a,c},$$

$$(49.)\quad \sum_a G_{a,c} K'_{a,c'} = \sum_a G_{a,c'} K'_{a,c}.$$

Setzt man daher

$$(50.)\quad \begin{cases} \varepsilon_{a,c} = \sum_{c'} G_{a,c'} J_{c,c'}, \\ \delta_{a,c} = \sum_{c'} G_{c',a} K'_{c',c} \cdot \pi, \\ \sigma_{a,c} = G_{a,c} \cdot \pi, \end{cases}$$

so hat man

$$(51.)\quad \varepsilon_{a,c} = \varepsilon_{c,a}, \qquad \delta_{a,c} = \delta_{c,a},$$

und die obigen Relationen geben

$$(52.)\quad \begin{cases} J_{a,c} = \sum_{c'} \varepsilon_{a,c'} K_{c',c}, \\ J'_{a,c} = \frac{1}{2}\sigma_{a,c} + \sum_{c'} \varepsilon_{a,c'} K'_{c',c}, \\ K'_{a,c} = \frac{1}{\pi}\sum_{c'} \delta_{a,c'} K_{c',c}. \end{cases}$$

Bildet man nun ferner die homogene Function zweiten Grades von $u_1, u_2, \ldots$:

$$E(u_1, u_2, \ldots) = \tfrac{1}{2}\sum_{a,c}\varepsilon_{a,c}u_a u_c,$$

so lässt sich mit Hülfe der vorhergehenden Gleichungen zeigen, dass

$$(53.) \qquad E(u_1 + 2\omega_1, \ldots) = E(u_1, \ldots) + 2\sum_a \varepsilon_a(u_a + \omega_a)$$

ist. Hieraus folgt vermöge der ersten Gleichung (45.), wenn man

$$(54.) \qquad g.e^{E(u_1, u_2, \ldots)}\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)$$

setzt, wo g eine Constante bedeutet:

$$(55.) \qquad \mathrm{Jc}(v_1 + 2\mathfrak{m}_1\pi, v_2 + 2\mathfrak{m}_2\pi, \ldots) = \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

Ich nenne diese Function von $v_1, v_2, \ldots$ die Jacobi'sche, weil sie für $n = 1$ von Jacobi in die Analysis eingeführt ist. Diesem Namen entsprechend ist das Zeichen Jc angenommen.

Die zweite der angeführten Gleichungen giebt aber, wenn

$$\delta_a = \mathfrak{n}_1\delta_{a,1} + \mathfrak{n}_2\delta_{a,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n\delta_{a,n}$$

gesetzt wird:

$$(56.) \qquad \mathrm{Jc}(v_1 + 2\delta_1 i, v_2 + 2\delta_2 i, \ldots) = e^{-2\sum_a \mathfrak{n}_a(v_a + \delta_a i)i}\,\mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots).$$

Nun lässt sich beweisen, dass jede Function, welche die in (55.) ausgesprochene Eigenschaft und überdies, gleichwie $\mathrm{Jc}(v_1, \ldots)$, den Charakter einer ganzen Function hat, wie ich denselben oben erklärte, durch eine unendliche, nicht nur für reelle, sondern auch für alle imaginären Werthe von $v_1, v_2, \ldots$ convergirende Reihe von der Form

$$\mathrm{S}\{A_{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots \mathfrak{n}_n} e^{(\mathfrak{n}_1 v_1 + \mathfrak{n}_2 v_2 + \cdots + \mathfrak{n}_n v_n)i}\}$$

sich darstellen lässt, in welcher Formel $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots \mathfrak{n}_n$ veränderliche ganze Zahlen bedeuten, deren jede, unabhängig von den übrigen, alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat. Für die Function Jc giebt die Gleichung (56.) die Bestimmung der Coefficienten, und man erhält

$$(57.) \qquad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\{e^{[\mathfrak{n}_1(v_1 + \delta_1 i) + \mathfrak{n}_2(v_2 + \delta_2 i) + \cdots + \mathfrak{n}_n(v_n + \delta_n i)]i}\},$$

oder auch

$$(58.)\qquad \mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots) = \mathrm{S}\left\{e^{-\sum_{a,c} n_a n_c \delta_{a,c}} \cos(n_1 v_1 + n_2 v_2 + \cdots + n_n v_n)\right\}.$$

Eigentlich wäre der Ausdruck rechts noch mit einer willkürlichen Constante zu multipliciren; was aber wegen der willkürlichen Grösse g unterbleiben kann. Der Coefficient g in (54.) wird dadurch bestimmt, dass für $u_1 = 0$, $u_2 = 0, \ldots, u_n = 0$ $\mathrm{Al}(u_1, \ldots) = 1$ wird. Hiernach findet sich:

$$(59.)\qquad \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots) = e^{-E(u_1, u_2, \ldots)} \cdot \frac{\mathrm{Jc}(v_1, v_2, \ldots)}{\mathrm{Jc}(0, 0, \ldots)}$$
$$(v_a = \sum_c \sigma_{c,a} u_c).$$

Für die Functionen $\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha$ erhält man ferner, mit Hülfe der Gleichungen (35.), folgende Ausdrücke. Es sei

$$\overset{\alpha}{K}_a = \mu_1 K_{a,1} + \mu_2 K_{a,2} + \cdots + \mu_n K_{a,n} - (\nu_1 K'_{a,1} + \nu_2 K'_{a,2} + \cdots + \nu_n K'_{a,n}) i,$$

wo jede der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots$ entweder gleich 1 oder gleich 0 ist und mittels der Formeln (15.) gefunden wird. Ferner sei

$$\delta_a = \nu_1 \delta_{a,1} + \nu_2 \delta_{a,2} + \cdots + \nu_n \delta_{a,n},$$

so ist

$$(60.)\quad e^{E(u_1, u_2, \ldots)} \mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = e^{\frac{1}{2}\sum_a \nu_a (v_a - \mu_a \pi + \frac{1}{2}\delta_a i) i} \frac{\mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1 \pi + \delta_1 i, \ldots)}{\mathrm{Jc}(0, 0, \ldots)}.$$

Es ist aber, wenn $\mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu_2 + \cdots + \mu_n \nu_n = \lambda$ gesetzt wird und

I. λ ungerade ist:

$$(61.)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}(1-\lambda)} e^{\frac{1}{2}\sum \nu_a (v_a - \mu_a \pi + \frac{1}{2}\delta_a i) i} \mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1 \pi + \delta_1 i, \ldots)$$
$$= \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1 n_1 + \cdots + \mu_n n_n} e^{-\sum_{a,c} (n_a + \frac{1}{2}\nu_a)(n_c + \frac{1}{2}\nu_c)\delta_{a,c}} \cdot \sin[(n_1 + \tfrac{1}{2}\nu_1) v_1 + \cdots]\right\}.$$

II. Wenn λ gerade ist:

$$(62.)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}\lambda} e^{\frac{1}{2}\sum \nu_a (v_a - \mu_a \pi + \frac{1}{2}\delta_a i) i} \mathrm{Jc}(v_1 - \mu_1 \pi + \delta_1 i, \ldots)$$
$$= \mathrm{S}\left\{(-1)^{\mu_1 n_1 + \cdots + \mu_n n_n} e^{-\sum_{a,c} (n_a + \frac{1}{2}\nu_a)(n_c + \frac{1}{2}\nu_c)\delta_{a,c}} \cdot \cos[(n_1 + \tfrac{1}{2}\nu_1) v_1 + \cdots]\right\}.$$

Setzt man ferner

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta} = \frac{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}}{\mathrm{Al}(u_1, u_2, \ldots)},$$

so giebt der Ausdruck rechts in der Gleichung (60.) den Werth von

$$e^{E(u_1, \ldots)} \operatorname{Al}(u_1, \ldots)_{\alpha,\beta},$$

wenn man für jede der Zahlen $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2$ u. s. w. die Summe derjenigen beiden Werthe setzt, die ihr für α und für β zukommen.

Führt man statt $v_1, v_2, \ldots$ wieder $u_1, u_2, \ldots$ ein, so erhält man noch folgende bemerkenswerthe Ausdrücke.

Es sei

$$\overset{\alpha}{K}_a = \overset{\alpha}{\omega}_a - i\overset{\alpha}{\omega}'_a,$$

wo dann

$$\begin{gathered}
\overset{0}{\omega}_a = \overset{1}{\omega}_a, \quad \overset{2}{\omega}_a = \overset{3}{\omega}_a, \quad \ldots, \quad \overset{2n-2}{\omega}_a = \overset{2n-1}{\omega}_a, \quad \overset{2n}{\omega}_a = 0, \\
\overset{0}{\omega}'_a = 0, \quad \overset{1}{\omega}'_a = \overset{2}{\omega}'_a, \quad \overset{3}{\omega}'_a = \overset{4}{\omega}'_a, \quad \ldots, \quad \overset{2n-1}{\omega}'_a = \overset{2n}{\omega}'_a, \\
\overset{2c-1}{\omega}_a = K_{a,c} + K_{a,c+1} + \cdots + K_{a,n} \\
\overset{2c}{\omega}'_a = K'_{a,c}
\end{gathered}$$

ist. Ferner sei

$$\begin{aligned}
\sigma_a &= \mathfrak{n}_1 \sigma_{a,1} + \mathfrak{n}_2 \sigma_{a,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n \sigma_{a,n}, \\
\omega'_a &= \mathfrak{n}_1 K'_{a,1} + \mathfrak{n}_2 K'_{a,2} + \cdots + \mathfrak{n}_n K'_{a,n},
\end{aligned}$$

so ist

$$\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_\alpha = \frac{\mathrm{S}\left\{ e^{-\sum_a (\sigma_a + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_a)(\omega'_a + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{\omega}'_a)} \cdot \cos\left[\Sigma(\sigma_a + \tfrac{1}{2}\overset{\alpha}{\sigma}_a)(u_a - \overset{\alpha}{\omega}_a)\right] \right\}}{\mathrm{S}\left\{ e^{-\sum_{\mathfrak{n}} \sigma_a \omega'_a} \cdot \cos \Sigma \sigma_a u_a \right\}}.$$

Das Zeichen S bezieht sich wieder auf die in den Ausdrücken σ_a, ω'_a enthaltenen Zahlen $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$; $\overset{\alpha}{\sigma}_a$ aber bedeutet denjenigen Werth von σ_a, den man erhält, wenn man für $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots$ die Werthe nimmt, welche ω'_a gleich $\overset{\alpha}{\omega}'_a$ machen. Und wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke an die Stelle von $\overset{\alpha}{\sigma}_a, \overset{\alpha}{\omega}_a, \overset{\alpha}{\omega}'_a$ die Summen

$$\overset{\alpha}{\sigma}_a + \overset{\beta}{\sigma}_a, \quad \overset{\alpha}{\omega}_a + \overset{\beta}{\omega}_a, \quad \overset{\alpha}{\omega}'_a + \overset{\beta}{\omega}'_a$$

setzt, so stellt er die Function $\operatorname{al}(u_1, u_2, \ldots)_{\alpha,\beta}$ dar.

Aehnliche Darstellungen der Abel'schen Functionen, wie die hier angegebenen, existiren noch unzählig viele. Namentlich giebt es, wie bei den elliptischen Functionen, noch eine Darstellungs-Art, bei welcher an die Stelle der cyklischen Functionen sin, cos die entsprechenden hyperbolischen

treten. Sodann habe ich in meiner Abhandlung auch ausgeführt, wie sich jeder aus Abel'schen Functionen auf rationale Weise gebildete Ausdruck als Quotient zweier Reihen von ganz ähnlicher Form darstellen lässt; und dadurch zugleich die Transformation der Abelschen Functionen vorbereitet.

Saline Westernkotten in Westfalen, 11. September 1853.

Anmerkung des Herausgebers des Journals für reine und angewandte Mathematik: Die schliesslichen Resultate des Obigen finden sich auch schon in einer Gelegenheitsschrift des Verfassers, datirt vom 17. Juli 1849.

ANMERKUNG.

*) Diese Stelle (vom Anfang des § 3 an) hätte einer präciseren Fassung bedurft. Vgl. die (für einen folgenden Band bestimmte) Abhandlung „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze", wo in § 5 ein allgemeiner Satz begründet wird, aus dem die Richtigkeit des hier Behaupteten sich ergiebt.

ÜBER DIE THEORIE DER ANALYTISCHEN FACULTÄTEN.

(Aus Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 51.)

Einleitung.

Bezeichnet man, unter u und x unbeschränkt veränderliche Grössen, unter y aber zunächst eine positive ganze Zahl verstehend, die durch das Product

$$\prod_{\nu=0}^{y-1}(u+\nu x)$$

dargestellte Function von u, x, y durch $f(u, x, y)$, so gelten die nachstehenden, zum Theil schon von Vandermonde*) und vollständig zuerst von Kramp**) aufgestellten Gleichungen, in denen y' auch eine positive ganze Zahl, k hingegen eine willkürlich anzunehmende Grösse bedeutet:

(a) $$f(u, x, y+y') = f(u, x, y)\, f(u+yx, x, y'),$$

(b) $$f(u, x, 1) = u,$$

(c) $$f(ku, kx, y) = k^y f(u, x, y),$$

(d) $$f(u, x, y) = f(u+yx-x, -x, y),$$

(e) $$f(u, 0, y) = u^y.$$

Die in den drei ersten dieser Gleichungen ausgesprochenen Eigenschaften der betrachteten Function sind den durch die Gleichungen

$$u^{y+y'} = u^y u^{y'},$$
$$u^1 = u,$$
$$(ku)^y = k^y u^y$$

*) Siehe die Abhandlung: Mémoire sur des irrationelles de diff. ordres. (Mém. Par. 1772.) Vandermonde betrachtet nur die Function $f(u, -1, y)$ — von ihm durch $[u]^y$ bezeichnet — auf die er $f(u, x, y)$ reducirt; es finden sich daher bei ihm die Gleichungen (c), (d) nicht ausdrücklich angegeben.

**) In einem Abschnitt der Schrift: Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, 1798.

ausgedrückten Eigenschaften der Potenz u^y, in welche $f(u,x,y)$ für $x=0$ übergeht, so analog, dass die genannten Mathematiker sich berechtigt hielten, die Existenz einer analytischen Function $f(u,x,y)$ anzunehmen, welche für jeden positiven ganzzahligen Werth von y durch das obige Product dargestellt werde, aber ebenso wie die Function u^y für beliebige Werthe von y eine Bedeutung habe und den Gleichungen (a) bis (e) genüge. Für diese hypothetische Function schlug Kramp die Benennung »Facultät« und die Bezeichnung

$$u^{y|x}$$

vor; u nannte er die Basis, x die Differenz und y den Exponenten der Facultät. Der von ihm unternommene Versuch jedoch, eine Theorie dieser Function aus den vorausgesetzten Eigenschaften derselben abzuleiten, ist längst als ein gänzlich verfehlter erkannt. Eine Function, wie sie sich Kramp unter $u^{y|x}$ vorstellte, giebt es gar nicht; denn die Gleichungen (a) bis (e) sind nicht mit einander vereinbar, wenn y keine ganze Zahl ist. Ausserdem hat Kramp bei seinen Deductionen den Fehler begangen, dass er aus der Gleichung (e) schloss, es sei

$$\lim_{x=0} u^{y|x} = u^y,$$

in welcher Weise auch x sich der Grenze Null nähern möge — eine Annahme, die sich als unzulässig herausstellt, wie ich im Folgenden (§ 2) zeigen werde.

Ungeachtet der Unhaltbarkeit der Kramp'schen Facultäten-Theorie wurde indessen der Grundgedanke derselben, angemessen modificirt, von anderen Mathematikern als Ausgangspunkt für neue Untersuchungen aufgenommen.

Bessel*) suchte die Widersprüche, in welche Kramp sich verwickelt hatte, dadurch zu vermeiden, dass er zur Definition der Facultät $u^{y|x}$ von den obigen Gleichungen (a) bis (e) nur die erste, zweite und vierte benutzte:

$$\text{(f)} \qquad \begin{cases} u^{y+y'|x} = u^{y|x}(u+yx)^{y'|x}, \\ u^{1|x} = u, \end{cases}$$

$$\text{(g)} \qquad u^{y|x} = (u+yx-x)^{y|-x},$$

ausserdem aber, seine Untersuchung auf reelle Werthe der Veränderlichen

*) Königsberger Archiv für Naturwissenschaft und Mathematik, Jahrg. 1812, St. 3.

u, x, y beschränkend, festsetzte, es solle

$$\text{(h)} \qquad \lim_{u=+\infty} \frac{u^{y|x}}{u^y} = 1$$

sein, mit der auch im Folgenden festzuhaltenden Bedingung, dass der Potenz u^y, wenn u positiv ist, ihr reeller Werth beigelegt werde.

Diesen Bestimmungen gemäss ergab sich ihm:

$$\text{(k)} \qquad u^{y|x} = \lim_{n=\infty} \left\{ (nx)^y \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{u+\nu x}{u+yx+\nu x} \right) \right\}, \text{ wenn } x \text{ positiv},$$

$$\text{(l)} \qquad u^{y|x} = \lim_{n=\infty} \left\{ (-nx)^y \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{u+yx-\nu x}{u-\nu x} \right) \right\}, \text{ wenn } x \text{ negativ ist.}$$

Durch diese Formeln wird nun in der That für alle reellen Werthsysteme der Grössen u, x, y (mit Ausnahme derer, in welchen $x = 0$ ist) eine Function $u^{y|x}$ definirt, welche die in den Gleichungen (f), (g) ausgesprochenen Eigenschaften besitzt und zugleich, worauf Bessel Gewicht legte, stets einen reellen Werth hat.

Gegen diese Bessel'sche Definition der Facultät ist aber Folgendes einzuwenden. Die Ausdrücke auf der Rechten der Gleichungen (k), (l) sind beide — unter der Bedingung, dass vom Gebiete der Veränderlichen x der Werth $x = 0$ ausgeschlossen werde — analytische, für beliebige (complexe sowohl als reelle) Werthe der Veränderlichen u, x, y definirte Functionen. In der Bestimmung, dass $u^{y|x}$ für positive Werthe von x durch den ersten Ausdruck — zu welchem man mit Nothwendigkeit gelangt, wenn man von den Gleichungen (f), (h) ausgeht —, für negative Werthe von x aber durch den zweiten Ausdruck, der eine ganz andere Function ist als jener, dargestellt werden solle, liegt also eine Willkürlichkeit, die ebenso wenig zu rechtfertigen ist, wie wenn man z. B. $\log x$ für positive Werthe von x auf die gewöhnliche Weise definiren, für negative aber $\log x = \log(-x)$ annehmen wollte.*) Auch wüsste ich nicht, nach welchem Princip man verfahren sollte, um die Bessel'sche Definition von $u^{y|x}$ auf complexe Werthe von x auszu-

*) Mit Anwendung der in der Abhandlung „Zur Functionenlehre" eingeführten Terminologie würde ich mich jetzt so ausdrücken: Die von Bessel definirte Facultät $u^{y|x}$ ist keine monogene Function ihrer Argumente; die beiden Ausdrücke, von denen der eine sie für positive, der andere für negative Werthe von x darstellen soll, sind Zweige zweier verschiedenen analytischen Functionen. (Anmerkung vom Jahre 1886.)

dehnen. Ein Uebelstand ist es ferner, dass die obige Gleichung (c) für Bessel's Facultät nur gilt, wenn k eine positive Grösse ist, während doch die Ausdrücke auf beiden Seiten der Gleichung auch für negative Werthe von k bestimmte Werthe haben.

Abweichend von Bessel hat Crelle*) von den obigen Gleichungen (a) bis (e) die drei ersten als die Grundgleichungen hingestellt, aus denen sich die ganze Theorie der analytischen Facultäten ableiten lasse. Dies ist aber keineswegs der Fall; denn die genannten Gleichungen sind zwar, wie im Folgenden (§ 1) nachgewiesen wird, mit einander vereinbar, reichen aber zur Bestimmung der Function $f(u, x, y)$ gar nicht aus.

Es sei nämlich $f_1(u, x, y)$ irgend eine bestimmte, den in Rede stehenden Gleichungen genügende Function, so werden die Gleichungen (a), (c) auch befriedigt, wenn man, unter $\varphi(u)$ eine willkürlich anzunehmende Function von u verstehend,

$$f(u, x, y) = \frac{\varphi\left(\frac{u}{x} + y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)} f_1(u, x, y)$$

setzt. Damit nun $f(u, x, y)$ auch der Gleichung (b) genüge, braucht die Function $\varphi(u)$ nur so angenommen zu werden, dass

$$\varphi\left(\frac{u}{x} + 1\right) = \varphi\left(\frac{u}{x}\right)$$

oder für jeden Werth von u

$$\varphi(u + 1) = \varphi(u)$$

ist; man kann also z. B. für $\varphi(u)$ eine willkürliche Function von $\cos(2u\pi)$ und $\sin(2u\pi)$ nehmen.

Es giebt hiernach unendlich viele Functionen $f(u, x, y)$, welche den Gleichungen (a), (b), (c) genügen.

Wenn also Crelle aus diesen Gleichungen allein völlig bestimmte Darstellungen einer denselben genügenden Function $f(u, x, y)$ abgeleitet hat, so

---

*) Theorie der analytischen Facultäten, 1824.

Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques, 1831. (Ursprünglich im 7. Bande des Crelle'schen Journals erschienen.)

sind dabei nothwendig Fehler von ihm begangen worden, die er nicht wahrgenommen hat. Die Quelle dieser Fehler findet sich in § 8 der Abhandlung angegeben.

Von den späteren Bearbeitungen der Facultätenlehre führe ich noch die von Ohm*) und Öttinger**) herrührenden an.

Ohm definirt die Facultät $u^{y|x}$, auf reelle Werthe der Grössen u, x, y sich beschränkend, zunächst für (positive und negative) ganzzahlige Werthe von y, und gelangt dann zu dem Ausdrucke

$$u^{y|x} = \operatorname{Lim}\left\{(nx)^y \frac{u^{n|x}}{(u+yx)^{n|x}}\right\} \text{ für } \begin{cases} n = +\infty, \text{ wenn } x \text{ positiv,} \\ n = -\infty, \text{ wenn } x \text{ negativ ist.} \end{cases}$$

Diese Definition von $u^{y|x}$ stimmt vollkommen mit der Bessel'schen überein, so dass etwas Weiteres darüber zu bemerken unnöthig ist.

Öttinger's Begründung der Facultäten-Theorie muss als eine ebenso verfehlte wie die Kramp'sche bezeichnet werden. Auch Öttinger hat es für überflüssig gehalten, genau zu definiren, was unter einer Facultät mit einem nicht ganzzahligen Exponenten zu verstehen sei, und kein Bedenken getragen, derselben alle diejenigen Eigenschaften beizulegen, die ihr zukommen, wenn der Exponent eine unbestimmte positive ganze Zahl ist. Das Auffallendste aber ist Folgendes. Es lässt sich eine Reihe von der Form

$$u^y\left(1 + (y)_1 \frac{x}{u} + (y)_2 \frac{x^2}{u^2} + (y)_3 \frac{x^3}{u^3} + \cdots\right),$$

wo $(y)_1$, $(y)_2$, $(y)_3$, ... ganze rationale Functionen von y sein sollen, wie schon Kramp ausgeführt hat, so bestimmen, dass dieselbe für jeden positiven ganzzahligen Werth von y gleich

$$\prod_{\nu=0}^{y-1}(u+\nu x)$$

ist. Öttinger hat nun diese Reihe für beliebige Werthe von y als Ausdruck der Facultät $u^{y|x}$ betrachtet und häufig Anwendung davon gemacht, ohne zu ahnen, dass diese Reihe, wenn y keine positive ganze Zahl ist, niemals convergirt (§ 7 der Abhandlung), also jedes mit ihrer Hülfe erhaltene Ergebniss nothwendig, wenn nicht unrichtig, doch jedenfalls unsicher ist.

*) Crelle's Journal, B. 39.

**) Ebend. B. 33, 35, 38, 44.

Aus den vorstehenden Bemerkungen erhellt zur Genüge, dass die Theorie der analytischen Facultäten, so vielfach dieselbe auch schon behandelt worden ist, noch immer an wesentlichen Mängeln leidet. Diese darzulegen und zu beseitigen, ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes.*)

1.

Ich beginne mit der allgemeinsten Bestimmung derjenigen von drei Veränderlichen u, x, y abhängigen Function $f(u, x, y)$, welche den von Crelle aufgestellten Gleichungen

$$f(u, x, y+k) = f(u, x, y)\, f(u+yx, x, k) \tag{1.}$$

$$f(ku, kx, y) = k^y f(u, x, y) \tag{2.}$$

$$f(u, x, 1) = u \tag{3.}$$

Genüge leistet.

Vertauscht man in der ersten Gleichung y und k mit einander, so erhält man

$$f(u, x, y+k) = f(u, x, k)\, f(u+kx, x, y),$$

und wenn man hierin $u-kx$ für u setzt,

$$f(u, x, y) = \frac{f(u-kx, x, y+k)}{f(u-kx, x, k)};$$

woraus ferner, indem man $u-kx = wx$, also $k = \frac{u}{x} - w$ setzt,

$$f(u, x, y) = \frac{f\left(wx, x, \frac{u}{x} + y - w\right)}{f\left(wx, x, \frac{u}{x} - w\right)},$$

*) Der Leser wolle bemerken, dass die vorliegende Abhandlung bereits im Jahre 1854, und zwar auf den ausdrücklichen Wunsch Crelle's, dem ich meine Bedenken gegen seine Theorie der Facultäten mitgetheilt hatte, geschrieben ist, nachdem ich einen Theil ihres Inhalts schon im Jahre 1843 (als Beilage zum Jahresbericht des Progymnasiums zu Deutsch-Crone) veröffentlicht hatte. Obwohl die Theorie der analytischen Facultäten in meinen Augen durchaus nicht die Wichtigkeit hat, die ihr in früherer Zeit viele Mathematiker beimassen, so habe ich doch die Abhandlung jetzt wieder abdrucken lassen, weil sie manches enthält, das auch gegenwärtig noch, wie ich glaube, angehenden Mathematikern von Nutzen sein kann. Wesentliche Veränderungen habe ich nicht vorgenommen; nur die Einleitung ist neu bearbeitet worden, weil es mir zweckmässig erschien, auf den Inhalt der kritisirten, heutzutage nicht Jedermann mehr zugänglichen Schriften etwas ausführlicher als ich es früher für nöthig gehalten, einzugehen. (Anmerkung vom Jahre 1886.)

und sodann, mit Anwendung der zweiten Gleichung,

$$(4.) \qquad f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{f\left(w, 1, \frac{u}{x}+y-w\right)}{f\left(w, 1, \frac{u}{x}-w\right)}$$

folgt.

Legt man jetzt der willkürlichen Grösse w irgend einen bestimmten Werth bei, und setzt

$$(5.) \qquad f(w, 1, u-w) = F(u),$$

so erhält man:

$$(6.) \qquad f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)}.$$

Umgekehrt erhellt, dass jede Function $f(u, x, y)$, die, bei ganz willkürlicher Annahme von $F(u)$, durch diese Formel bestimmt wird, den beiden ersten der obigen Gleichungen Genüge thut. Denn es ergiebt sich aus (6.):

$$f(u,x,y+k) = x^{y+k} \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y+k\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} = x^y \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} \cdot x^k \cdot \frac{F\left(\frac{u+yx}{x}+k\right)}{F\left(\frac{u+yx}{x}\right)}$$

$$= f(u,x,y)\, f(u+yx, x, k),$$

sowie ferner

$$f(ku, kx, y) = (kx)^y \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+y\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} = k^y f(u,x,y).$$

Damit nun auch die dritte Gleichung befriedigt werde, ist nöthig, dass

$$f(u,x,1) = x \cdot \frac{F\left(\frac{u}{x}+1\right)}{F\left(\frac{u}{x}\right)} = u$$

oder

$$F\left(\frac{u}{x}+1\right) = \frac{u}{x} \cdot F\left(\frac{u}{x}\right)$$

sei; woraus, wenn man ux statt u setzt, die Relation

$$(7.) \qquad F(u+1) = uF(u)$$

folgt. Man sieht sofort, dass eine Function, welche dieser Gleichung genügt, die Legendre'sche $\Gamma(u)$ ist,*) und dass man, um den allgemeinsten Ausdruck von $F(u)$ zu haben,

$$F(u) = \varphi(u)\,\Gamma(u)$$

setzen muss; wo unter $\varphi(u)$ eine periodische Function zu verstehen ist, welche unverändert bleibt, wenn u in $u+1$ übergeht. Ohne aber hinsichtlich der Theorie der Γ-Function irgend etwas vorauszusetzen, kann man folgendermassen fortfahren.

Aus (7.) folgt, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$F(u+n) = u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1)\,F(u),$$

und hieraus, wenn $n-1$ statt n, und 1 statt u gesetzt wird:

$$F(n) = 1.2\ldots(n-1)\,F(1),$$

also

$$\frac{F(1)}{F(u)} = u\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\cdot\frac{F(n)}{F(u+n)}.$$

Nun ergiebt sich aber aus den Sätzen über die Convergenz der unendlichen Producte, die ich im Folgenden zusammenstellen werde, dass sich eine Function $\psi(n)$ der positiven veränderlichen Zahl n, falls n ohne Ende wächst, einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn der Werth von

$$n^u\left(\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)}-1\right)$$

für $n=\infty$ nicht unendlich gross wird. Setzt man nun

$$u\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right) = \psi(n),$$

so ist

$$\frac{\psi(n)}{\psi(n-1)} = 1+\frac{u}{n-1},$$

und man sieht, dass zwar nicht $\psi(n)$, wohl aber $n^{-u}\psi(n)$ für $n=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth annimmt, weil für hinlänglich grosse Werthe

*) $\Gamma(u)$ ist gleichbedeutend mit der Gaussischen Function $\Pi(u-1)$.

von n

$$\frac{n^{-u}\psi(n)}{(n-1)^{-u}\psi(n-1)} = \left(1+\frac{u}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^u = \left(1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\cdots\right)\left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u-1)}{1.2.n^2}-\cdots\right)$$
$$= 1-\frac{u(u-1)}{1.2.n^2}+\cdots$$

ist, für $n=\infty$ also

$$n^2\left(\frac{n^{-u}\psi(n)}{(n-1)^{-u}\psi(n-1)}-1\right) = -\frac{1}{2}u(u-1).$$

Da nun ferner

$$n^{-u} = \left(\frac{1}{2}\right)^u\left(\frac{2}{3}\right)^u\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)^u$$

ist, so hat man:

$$n^{-u}\psi(n) = u.\left(\frac{1}{2}\right)^u\left(1+\frac{u}{1}\right).\left(\frac{2}{3}\right)^u\left(1+\frac{u}{2}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)^u\left(1+\frac{u}{n-1}\right),$$

und es hat das unendliche Product

$$u.\prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}$$

einen endlichen, bestimmten Werth, welchen (reellen oder imaginären) Werth auch u haben möge. Ich möchte für dasselbe die Benennung »Factorielle von u« und die Bezeichnung $Fc(u)$ vorschlagen, indem die Anwendung dieser Function in der Theorie der Facultäten dem Gebrauch der Γ-Function deshalb vorzuziehen sein dürfte, weil sie für keinen Werth von u eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und überhaupt, gleich den einfachsten transcendenten Functionen e^u, $\sin u$, $\cos u$ u. s. w. im Wesentlichen den Charakter einer rationalen ganzen Function besitzt, so dass sie z. B. auch nach ganzen positiven Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickelt werden kann.

Nun ist

$$\frac{n^{-(u+1)}(u+1)\left(1+\frac{u+1}{1}\right)\left(1+\frac{u+1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{u+1}{n-1}\right)}{n^{-u}u\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)} = \frac{1}{u}\cdot\frac{u+n}{n},$$

mithin, wenn man $n=+\infty$ setzt:

$$\frac{Fc(u+1)}{Fc(u)} = \frac{1}{u},$$

oder

$$Fc(u) = u \,.\, Fc(u+1). \tag{8.}$$

Verbindet man diese Gleichung mit der obigen (7.), so erhält man

$$Fc(u) \,.\, F(u) = Fc(u+1) \,.\, F(u+1);$$

d. h. es ist $Fc(u) \,.\, F(u)$ eine Function von u, die sich nicht ändert, wenn $u+1$ statt u gesetzt wird. Bezeichnet man daher eine solche Function durch $\varphi(u)$, so ergiebt sich

$$F(u) = \frac{\varphi(u)}{Fc(u)},$$

und es wird daher der allgemeinste Ausdruck einer Function $f(u, x, y)$, welche die Gleichungen (1.), (2.), (3.) befriedigen soll, durch die Formel

$$f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{u}{x}+y\right)}{\varphi\left(\frac{u}{x}\right)} \tag{9.}$$

gegeben, wo

$$Fc(u) = u \,.\, \prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right) \right\} \tag{10.}$$

ist, und $\varphi(u)$ eine beliebige Function von u bedeutet, für welche die Relation

$$\varphi(u+1) = \varphi(u) \tag{11.}$$

gilt. Wenn y eine ganze Zahl ist, so fällt φ aus dem Ausdrucke von $f(u, x, y)$ weg.

2.

Nach dem Vorstehenden ist es zur vollständigen Definition von $f(u, x, y)$ nothwendig, den obigen drei Grundgleichungen noch eine neue Bedingung hinzuzufügen, durch welche die Function $\varphi(u)$ bestimmt wird. Ehe ich aber dieselbe aufsuche, muss ich auf eine, allen Functionen, welche den Gleichungen (1.), (2.), (3.) genügen, gemeinsame Eigenthümlichkeit aufmerksam machen, aus deren Nichtbeachtung in mehreren der bisherigen Darstellungen der Facultätenlehre erhebliche Irrthümer hervorgegangen sind.

Man hat zur Bestimmung von $f(u, x, y)$ unter anderen folgenden Weg eingeschlagen. Es ist (gemäss (1.), (3.))

$$f(u, x, y+1) = f(u, x, y)\, f(u+yx, x, 1) = (u+yx).f(u, x, y),$$
$$f(u, x, y+1) = f(u, x, 1)\, f(u+x, x, y) = u.f(u+x, x, y)$$

und daher

$$(12.) \qquad f(u, x, y) = \frac{u}{u+yx} \cdot f(u+x, x, y);$$

woraus man, indem man $u+x$, $u+2x$, $u+3x$, u. s. w. statt u setzt, weiter

$$(13.) \quad f(u, x, y) = \frac{u(u+x)(u+2x)\ldots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\ldots(u+yx+(n-1)x)} \cdot f(u+nx, x, y)$$

folgert, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Setzt man ferner in dieser Formel $u-nx$ statt u, so erhält man

$$(14.) \quad f(u, x, y) = \frac{(u+yx-x)(u+yx-2x)\ldots(u+yx-nx)}{(u-x)(u-2x)\ldots(u-nx)} \cdot f(u-nx, x, y).$$

Nun ist aber

$$(15.) \qquad Fc(u) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left\{ n^{-u} \cdot \frac{u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} \right\},$$

also, wenn unter w eine beliebig anzunehmende Grösse verstanden wird,

$$(16.) \qquad \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{w}{x}\right)} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left\{ n^{-\frac{u}{x}+\frac{w}{x}} \cdot \frac{u(u+x)(u+2x)\ldots(u+(n-1)x)}{w(w+x)(w+2x)\ldots(w+(n-1)x)} \right\},$$

woraus, wenn man $w-x$ statt u, $u-x$ statt w, $-x$ statt x setzt,

$$(17.) \qquad \frac{Fc\left(1-\frac{w}{x}\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left\{ n^{\frac{w}{x}-\frac{u}{x}} \cdot \frac{(w-x)(w-2x)\ldots(w-nx)}{(u-x)(u-2x)\ldots(u-nx)} \right\}$$

folgt. Hiernach geben die Gleichungen (13.), (16.), wenn man $w = u+yx$ setzt,

$$(18.) \quad f(u, x, y) = \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)} \cdot \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \left\{ n^{-y} . f(u+nx, x, y) \right\}$$

und die Gleichungen (14.), (17.):

$$(19.) \qquad f(u,x,y) = \frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} \cdot \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{n^{-y}.f(u-nx,x,y)\right\}.$$

Bis hierher sind nur die Gleichungen (1.), (3.) angewandt. Mit Hülfe der zweiten ergiebt sich ferner, da

$$f(u+nx,x,y) = (u+nx)^y.f\left(1,\frac{x}{u+nx},y\right),$$

$$f(u-nx,x,y) = (u-nx)^y.f\left(1,\frac{x}{u-nx},y\right),$$

und

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{n^{-y}(u+nx)^y\right\} = x^y.\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(1+\frac{u}{nx}\right)^y = x^y,$$

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{n^{-y}(u-nx)^y\right\} = (-x)^y.\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(1-\frac{u}{nx}\right)^y = (-x)^y$$

ist:

$$(20.) \qquad f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)} \cdot \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f\left(1,\frac{x}{u+nx},y\right),$$

und

$$(21.) \qquad f(u,x,y) = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} \cdot \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f\left(1,\frac{x}{u-nx},y\right).$$

Setzt man $x = 0$, so können die Gleichungen (1.), (2.), (3.), die dann in

$$f(u,0,y+k) = f(u,0,y)\,f(u,0,k),$$
$$f(ku,0,y) = k^y.f(u,0,y),$$
$$f(u,0,1) = u$$

übergehen, nicht anders befriedigt werden, als wenn man

$$f(u,0,y) = u^y$$

annimmt. Könnte man hieraus folgern, dass $f(u,x,y)$, wenn x seinem numerischen Werthe nach beständig abnimmt, sich unbedingt der Grenze u^y nähern

müsse, so würde die Gleichung (20.)

$$f(u,x,y) = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)} \tag{22.}$$

geben; was mit dem vorhin Bewiesenen, dass $f(u,x,y)$ durch die Gleichungen (1.), (2.), (3.) allein nicht bestimmt sei, im Widerspruch steht. Aber noch mehr. Die Gleichung (21.) würde, unter derselben Voraussetzung,

$$f(u,x,y) = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} \tag{23.}$$

geben, und es müsste

$$(-x)^y \cdot \frac{Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right)} = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)},$$

$$\frac{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right).Fc\left(1-\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1-\frac{u}{x}\right).Fc\left(\frac{u}{x}\right)} = (-1)^y$$

sein; was ein offenbar falsches Resultat ist, wie schon daraus erhellt, dass für $u = x$ der Ausdruck links die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, sobald y keine ganze Zahl ist.

Da die Gleichungen (20.), (21.) strenge Folgerungen aus den Gleichungen (1.), (2.), (3.) sind, und dieselben wirklich befriedigt werden, wenn man für $f(u,x,y)$ irgend eine der durch die Formel (9.) gegebenen Functionen annimmt: so kann der hervorgetretene Widerspruch nur in der Voraussetzung seinen Grund haben, dass sich $f(1,x,y)$, wenn der numerische Werth von x unendlich klein wird, unbedingt der Grenze 1 nähere. Diese Annahme ist also unstatthaft.

Dies lässt sich aber auch direct folgendermassen nachweisen.

Setzt man, unter w eine positive reelle Grösse verstehend, in der Formel (9.) wx statt u, und wendet die Relation (2.) an, so erhält man:

$$f\left(1,\frac{1}{w},y\right) = 1^y \cdot \frac{Fc(w)}{w^y.Fc(w+y)} \cdot \frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}. \tag{24.}$$

Setzt man aber $-x$ statt x und darauf wx statt u, so ergiebt sich:

$$f\left(1, -\frac{1}{w}, y\right) = (-1)^y \cdot \frac{Fc(-w)}{w^y . Fc(-w+y)} \cdot \frac{\varphi(-w+y)}{\varphi(-w)}.$$

In Folge der Formel (10.) ist aber

$$Fc(u) . Fc(-u) = -u . u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty} \left(1 - \frac{u^2}{\alpha^2}\right) = -u \frac{\sin(u\pi)}{\pi},$$

oder, weil $Fc(u) = u . Fc(u+1)$ ist:

$$Fc(-u) = -\frac{\sin(u\pi)}{\pi Fc(1+u)}; \tag{25.}$$

daher ist

$$f\left(1, -\frac{1}{w}, y\right) = (-1)^y \cdot \frac{Fc(1+w-y)}{w^y Fc(1+w)} \cdot \frac{\sin(w\pi)}{\sin(w-y)\pi} \cdot \frac{\varphi(-w+y)}{\varphi(-w)}, \tag{26.}$$

oder, wenn man

$$(-1)^u \frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)} = \psi(u)$$

setzt, wo dann $\psi(u)$, eben wie $\varphi(u)$, die Eigenschaft hat, dass

$$\psi(u+1) = \psi(u)$$

ist:

$$f\left(1, -\frac{1}{w}, y\right) = 1^y \cdot \frac{Fc(1+w-y)}{w^y Fc(1+w)} \cdot \frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}. \tag{27.}$$

Nun hat man ferner:

$$\begin{aligned} Fc(u) &= u(u+1)(u+2)\ldots(u+n-1) . Fc(u+n), \\ Fc(1) &= 1.2.3\ldots(n-1) . Fc(n), \end{aligned} \tag{28.}$$

wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Nach (10.) ist $Fc(1) = 1$, also

$$\frac{Fc(n)}{Fc(u+n)} \cdot Fc(u) = \frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{1.2\ldots(n-1)};$$

woraus, mit Berücksichtigung von (15.),

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{Fc(n)}{n^u Fc(n+u)} \right\} = 1 \tag{29.}$$

folgt.

Es sei nun n die grösste in w enthaltene ganze Zahl, und $w = n + w'$, so hat man:

$$\frac{Fc(w)}{w^u Fc(w+u)} = \left(\frac{Fc(n)}{n^{u+w'} Fc(n+w'+u)} : \frac{Fc(n)}{n^{w'} Fc(w'+n)} \right) \cdot \left(\frac{w'+n}{n} \right)^{-u},$$

mithin nach (29.)

$$\text{(30.)} \qquad \lim_{w=+\infty}\left\{\frac{Fc(w)}{w^u Fc(w+u)}\right\} = 1.$$

Ebenso ist, weil

$$\frac{Fc(1+w-u)}{w^u Fc(1+w)} = \left(1 : \frac{Fc(1+w)}{(1+w)^{-u}.Fc(1+w-u)}\right)\cdot\left(\frac{1+w}{w}\right)^u$$

ist,

$$\text{(31.)} \qquad \lim_{w=+\infty}\left\{\frac{Fc(1+w-u)}{w^u Fc(1+w)}\right\} = 1,$$

folglich, gemäss (24.), (30.) und (27.), (31.):

$$\text{(32.)} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{w=+\infty} f\left(1, \frac{1}{w}, y\right) = 1^y \lim\limits_{w=+\infty}\left\{\frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}\right\}, \\ \lim\limits_{w=+\infty} f\left(1, -\frac{1}{w}, y\right) = 1^y \lim\limits_{w=+\infty}\left\{\frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}\right\}. \end{cases}$$

Es sind aber $\frac{\varphi(w+y)}{\varphi(w)}$ und $\frac{\psi(w)}{\psi(w-y)}$ beides periodische Functionen von w, und können als solche, wenn w ohne Ende zunimmt, keiner bestimmten Grenze sich nähern, wenn sie sich nicht etwa auf Constanten reduciren. Soll dies für jeden Werth von y geschehen, so müssen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ selber von u unabhängig sein. Das ist aber, weil

$$\psi(u) = (-1)^u \frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)}$$

ist, für beide gleichzeitig nicht möglich. Mithin können sich die Functionen

$$f(1, x, y) \text{ und } f(1, -x, y),$$

wenn x unendlich klein wird, in keinem Falle beide einer bestimmten Grenze nähern.

3.

Aus dem Vorhergehenden ist zugleich zu ersehen, dass man eine Bestimmung der Function $\varphi(u)$, wie sie zur vollständigen Definition von $f(u, x, y)$ noch nöthig ist, erhält, wenn man festsetzt, es solle sich $f(1, x, y)$ entweder für einen positiven, oder für einen negativen Werth von x, wenn derselbe ohne Ende abnimmt, der Grenze 1^y nähern. Eine dieser Annahmen ist nothwendig, wenn die Analogie der Facultäten mit den Potenzen so viel als möglich behauptet werden soll.

Bei der ersten Annahme muss sich $\varphi(u)$ auf eine Constante reduciren; und wenn man die Function, in welche alsdann $f(u, x, y)$ übergeht, mit Crelle durch $(u, +x)^y$ bezeichnet, so hat man:

$$(33.) \qquad (u, +x)^y = x^y \cdot \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}.$$

Hiernach bedeutet $(u, +x)^y$ eine Function von u, x, y, welche den Gleichungen

$$(34.) \qquad \begin{cases} (u, +x)^{y+k} = (u, +x)^y (u+yx, +x)^k \\ (ku, +kx)^y = k^y (u, +x)^y \\ (u, +x)^1 = u \end{cases}$$

genügt, und zugleich die Eigenschaft hat, dass sich $(1, +x)^y$ der Grenze 1^y nähert, wenn x, stets positiv bleibend, ohne Ende abnimmt.

Bei der zweiten Annahme muss $\psi(u) = (-1)^u \frac{\sin(u\pi)}{\varphi(-u)}$ eine Constante sein. Dann hat man:

$$f(u, -x, y) = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(-\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(-\frac{u}{x}+y\right)} \cdot \frac{\varphi\left(-\frac{u}{x}+y\right)}{\varphi\left(-\frac{u}{x}\right)} = x^y \cdot \frac{Fc\left(1+\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1+\frac{u}{x}\right)}.$$

Diesen besonderen Ausdruck für $f(u, -x, y)$ will ich durch

$$(u, -x)^y$$

bezeichnen; wobei wohl zu beachten ist, dass man in den Ausdrücken $(u, +x)^y$, $(u, -x)^y$ die Zeichen (+) und (−) vor x nicht als zu x gehörige Vorzeichen betrachten darf, so dass also $(u, -x)^y$ keineswegs die Function bedeutet, in welche $(u, +x)^y$ übergeht, wenn x in $-x$ verwandelt wird, welche vielmehr durch

$$(u, +(-x))^y$$

zu bezeichnen wäre. Es soll vielmehr, ganz in dem Sinne des Urhebers dieser Bezeichnungsweise, durch das (+) oder das (−) vor dem x nur angedeutet werden, dass x mit u in eine gewisse Verbindung trete, die in dem einfachsten Falle, wo y eine ganze positive Zahl,

$$(u, +x)^y = u(u+x)(u+2x)\ldots(u+(y-1)x)$$

und

$$(u,-x)^y = u(u-x)(u-2x)\dots(u-(y-1)x)$$

ist, in der That bei dem ersten Ausdrucke durch Addition, so wie bei dem andern durch Subtraction vermittelt wird.

Es ist also

$$(35.)\qquad (u,-x)^y = x^y \cdot \frac{Fc\left(1+\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1+\frac{u}{x}\right)},$$

und es gelten für $(u,-x)^y$ die Grundgleichungen

$$(36.)\qquad \begin{cases} (u,-x)^{y+k} = (u,-x)^y (u-yx,-x)^k, \\ (ku,-kx)^y = k^y (u,-x)^y, \\ (u,-x)^1 = u, \end{cases}$$

zu denen noch die Bestimmung tritt, dass sich $(1,-x)^y$ der Grenze 1^y nähert, wenn x, stets positiv bleibend, ohne Ende abnimmt.

Hierdurch sind nun zwei Arten von Facultäten auf völlig bestimmte Weise definirt, indem für beide analytische Ausdrücke gefunden sind, die für alle Werthe von u, x, y ihre Gültigkeit behalten. Es scheint zweckmässig, beide Formen

$$(u,+x)^y \text{ und } (u,-x)^y$$

beizubehalten, indem man, wenn die Differenz x positiv ist, vorzugsweise die erstere, im entgegengesetzten Falle aber lieber die andere anwendet. Sie hängen übrigens, wie aus (33.), (35.) ersichtlich, sehr einfach zusammen, indem

$$(37.)\qquad (u,-x)^y = (u-(y-1)x,+x)^y$$

und

$$(38.)\qquad (u,+x)^y = (u+(y-1)x,-x)^y$$

ist. Man hat ferner

$$(u,+(-x))^y = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(-\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(-\frac{u}{x}+y\right)} = (-x)^y \cdot \frac{Fc\left(1+\frac{u}{x}-y\right)}{Fc\left(1+\frac{u}{x}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{u}{x}\right)\pi}{\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi},$$

also

$$(39.) \qquad (u,+(-x))^y = (-1)^y \cdot \frac{\sin\left(\frac{u}{x}\right)\pi}{\sin\left(\frac{u}{x}-y\right)\pi} \cdot (u,-x)^y;$$

woraus man sieht, dass $(u,+(-x))^y$ nur dann mit $(u,-x)^y$ gleichbedeutend ist, wenn y eine ganze Zahl ist.

Anm. Wenn man die in der Einleitung angegebene, von Bessel und Ohm aufgestellte Formel für die von ihnen durch $u^{y|x}$ bezeichnete Function entwickelt, so erhält man

$$u^{y|x} = (u,+x)^y,$$
$$u^{y|-x} = (u,-x)^y,$$

wenn in beiden Fällen x positiv ist. Hiernach kann, wie schon bemerkt, $u^{y|x}$ nicht für alle Werthe von x durch einen einzigen analytischen Ausdruck dargestellt werden — abgesehen davon, dass die Definition von $u^{y|x}$ nur für reelle Werthe von x gegeben ist. Ferner ist es zwar dadurch, dass für positive und negative Werthe von x verschiedene Definitionen gegeben werden, erreicht, dass für positive Werthe von u allerdings die Gleichung

$$\lim_{x=0} u^{y|x} = u^y$$

besteht, sowohl wenn x positiv, als wenn x negativ ist; es gilt aber diese Gleichung nicht mehr für negative Werthe von u, also auch nicht allgemein.

4.

Die bisherigen Erörterungen haben nun zwar zu einer unzweideutigen Definition von

$$(u,+x)^y \text{ und } (u,-x)^y$$

geführt; es sind dazu aber vier Bestimmungen für jede dieser Functionen nöthig gewesen. Dies ist, wie schon aus den im Vorhergehenden ausgeführten Entwicklungen ohne Mühe nachgewiesen werden könnte, mehr, als nöthig.

Ich werde daher jetzt zeigen, wie man, ausgehend von einer ganz allgemeinen Definition von

$$(u,+x)^y \text{ und } (u,-x)^y,$$

die für jede dieser Functionen nur zwei Bestimmungen giebt, auf völlig systematischem Wege zu den Darstellungen derselben durch die Formeln (33.), (35.) gelangt; wodurch zugleich die Grundgleichungen (34.), (36.) gegeben werden.

So wie sich aus dem Begriffe eines Products von gleichen Factoren der allgemeine Begriff der Potenz entwickelt hat, so bildet für die Facultätenlehre die Betrachtung eines Products äquidifferenter Factoren den Ausgangspunkt. Nachdem nun, wenn y eine ganze positive Zahl bedeutet, das Product

$$u(u+x)(u+2x)\dots(u+(y-1)x)$$

durch $(u,+x)^y$ bezeichnet worden ist, findet man, auch ohne dass die Eigenschaften eines solchen Products weiter untersucht werden, indem

$$(u+x,+x)^y = \frac{u+yx}{u}\cdot(u,+x)^y$$

ist, die Differenzen-Gleichung

$$\frac{\Delta(u,+x)^y}{(u,+x)^y} = \frac{y\Delta u}{u}, \tag{40.}$$

wenn sich das Zeichen Δ auf u bezieht, und $\Delta u = x$ angenommmen wird. Gleich wie nun die Betrachtung der Differential-Gleichung

$$\frac{df(u)}{f(u)} = \frac{y\,du}{u}$$

zu der Potenz u^y mit willkürlichem Exponenten führt, so kann man sich die Bestimmung einer Function von u zur Aufgabe stellen, welche der Differenzen-Gleichung

$$\frac{\Delta f(u)}{f(u)} = \frac{y\Delta u}{u} \tag{41.}$$

bei einem beliebigen Werthe von y genügen soll.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, wenn $\Delta u = x$ gesetzt wird:

$$f(u+x)-f(u) = \frac{yx}{u}f(u),$$

$$f(u+x) = \frac{u+yx}{u}f(u),$$

$$f(u) = \frac{u}{u+yx}f(u+x);$$

woraus, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, weiter

$$f(u) = \frac{u(u+x)(u+2x)\dots(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\dots(u+(y+n-1)x)} \cdot f(u+nx),$$

oder

$$f(u) = \frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n} \cdot f(u+nx) \tag{42.}$$

folgt. Wenn y eine ganze positive Zahl ist, so kann man, wie gezeigt, $f(u) = (u,+x)^y$ setzen. Dann hat man:

$$(u+nx,+x)^y = (u+nx)^y \cdot \left(1+\frac{x}{u+nx}\right)\left(1+\frac{2x}{u+nx}\right)\dots\left(1+\frac{(y-1)x}{u+nx}\right),$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} = 1.$$

Dieser Umstand führt darauf, in der Gleichung (42.) $n = \infty$ zu setzen und sie so zu schreiben:

$$f(u) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{(u+nx)^y \cdot \frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}\right\} \cdot \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}. \tag{43.}$$

Es ist daher vor allen Dingen nöthig, genauer zu untersuchen, was aus dem Ausdrucke

$$(u+nx)^y \cdot \frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}$$

wird, wenn die positive ganze Zahl n ohne Ende wächst.

Zu dem Ende schalte ich hier zunächst einige allgemeine Sätze über die Convergenz der unendlichen Producte ein. Dieselben sind zwar, so wie die damit verbundenen Sätze über die Convergenz einer bestimmten Gattung von unendlichen Reihen, zum grossen Theile bekannt. Ich glaube aber, wenn ich gleichwohl ausführlicher darauf eingehe, nicht nur wegen der ganz elementaren Herleitung derselben, die einiges Eigenthümliche haben dürfte, sondern vorzüglich deswegen auf Entschuldigung rechnen zu dürfen, weil ich überall bei den vorkommenden Grössen die Untersuchung nicht auf reelle Werthe derselben einschränken, sondern auch auf complexe (imaginäre) Werthe ausdehnen werde.

5.

Einige Sätze über die Convergenz und Divergenz unendlicher Producte.

(I.) Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

sämmtlich reell, positiv und kleiner als Eins sind, und zugleich diese Reihe eine endliche Summe hat, so convergiren die Producte

$$P_n = (1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)$$
$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, beide gegen eine bestimmte, positive Grenze; und zwar das erste beständig abnehmend, das andere beständig zunehmend.

Es ist klar, dass P_n, Q_n beständig positiv sind, und dass die erste Grösse beständig abnimmt, die andere aber zunimmt, wenn n beständig wächst. Es ist daher zum Beweise des aufgestellten Satzes nur nöthig, zu zeigen, dass P_n stets grösser, und Q_n stets kleiner bleibt, als eine gewisse positive Grösse.

Es ist, wenn $a, b, c, d, \ldots$ reelle und positive Grössen sind,

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab > 1+a+b$$
$$(1+a)(1+b)(1+c) > (1+a+b)(1+c) > 1+a+b+c$$
$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) > (1+a+b+c)(1+d) > 1+a+b+c+d$$

u. s. w. Dieselben Ungleichheiten bestehen auch, wenn $a, b, c, d, \ldots$ sämmtlich negative Grössen, ihrem absoluten Betrage nach aber kleiner als 1 sind.

Ferner kann man, wenn E irgend einen echten positiven Bruch bedeutet, m so gross annehmen, dass die Summe

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+r}$$

für jeden Werth von r kleiner als E ist. Dies vorausgesetzt, werde $n = m+r$ gesetzt, wo auch m, r ganze positive Zahlen bedeuten sollen; so ist

$$\frac{P_{m+r}}{P_m} = (1-u_{m+1})(1-u_{m+2})\ldots(1-u_{m+r}) > 1-u_{m+1}-u_{m+2}-\cdots-u_{m+r} > 1-E,$$

also

$$P_n > P_m(1-E), \text{ wenn } n > m;$$

was gezeigt werden sollte.

Ferner ist

$$\frac{1}{Q_n} = \left(1-\frac{u_0}{1+u_0}\right)\left(1-\frac{u_1}{1+u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u_n}{1+u_n}\right),$$

und da nun, wenn $n > m$, E auch grösser als

$$\frac{u_{m+1}}{1+u_{m+1}} + \cdots + \frac{u_n}{1+u_n}$$

ist, so hat man:

$$\frac{1}{Q_n} > \left(1-\frac{u_0}{1+u_0}\right)\cdots\left(1-\frac{u_m}{1+u_m}\right)(1-E)$$

$$\frac{1}{Q_n} > \frac{1}{Q_m}(1-E),$$

$$Q_n < \frac{Q_m}{1-E}, \text{ wenn } n > m.$$

(II.) Wenn dagegen die Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

keine endliche Summe hat, so wird, wenn n ohne Ende zunimmt, P_n, beständig positiv bleibend und abnehmend, sich der Grenze Null nähern, während Q_n über jede Grenze hinaus wächst.

Es ist nämlich

$$Q_n > 1 + u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

und die Summe $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ wächst mit n über jede Grenze hinaus. Ferner ist

$$\frac{1}{P_n} = \left(1+\frac{u_0}{1-u_0}\right)\left(1+\frac{u_1}{1-u_1}\right)\cdots\left(1+\frac{u_n}{1-u_n}\right),$$

und die Reihe $\frac{u_0}{1-u_0}, \frac{u_1}{1-u_1}, \ldots$ hat ebenfalls keine endliche Summe. Es nimmt mithin $\frac{1}{P_n}$ gleichzeitig mit n ohne Ende zu, und zwar über jede Grenze hinaus; woraus folgt, dass P_n, beständig abnehmend, sich der Grenze Null nähern muss.

Zusatz. Setzt man

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

so ist

$$P_n = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2.3\ldots n} = \frac{1}{n},$$

also $P_n = 0$ für $n = \infty$. Daraus geht hervor, dass die unendliche Reihe

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots$$

keine endliche Summe haben kann. Wird dagegen

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

gesetzt, so ist

$$P_n = \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n} = \frac{1.2\ldots(n-1)}{2.3\ldots n}\cdot\frac{3.4\ldots(n+1)}{2.3\ldots n} = \frac{n+1}{2n},$$

also $P_n = \frac{1}{2}$ für $n = \infty$. Mithin wird die unendliche Reihe

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \cdots \frac{1}{n^2}, \cdots$$

eine endliche Summe haben.

(III.) Wenn die Glieder der Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

sämmtlich reell sind, und von einem bestimmten Gliede an beständig dasselbe Zeichen behalten und absolut kleiner als 1 bleiben, so wird das Product

$$P_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, gegen eine bestimmte endliche Grenze (die, sobald keine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich -1 ist, nicht Null ist) convergiren, wofern die Reihe $u_0, u_1, \ldots$ eine endliche Summe hat.

Wenn aber das Letztere nicht der Fall ist, so wird

$$P_n = \infty \text{ oder } P_n = 0 \text{ für } n = \infty$$

sein, je nachdem die Grössen $u_0, u_1, \ldots$ von einer bestimmten an stets positiv oder stets negativ sind.

Alles dies folgt unmittelbar aus den beiden vorhergehenden Sätzen.

(IV.) Auch wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

complexe (imaginäre) Werthe haben und die Reihe unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe hat, nähert sich das Product

$$P_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n),$$

wenn n ohne Ende wächst, einer bestimmten Grenze, die von Null verschieden ist, wofern nicht eine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich -1 ist.

Es werde $u_n = v_n + iw_n$ und

$$(1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) = p_n + iq_n,$$
$$\sqrt{p_n^2+q_n^2} = s_n$$

gesetzt, wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist. Dann hat man:

$$s_n = \sqrt{(1+v_0)^2+w_0^2}\cdot\sqrt{(1+v_1)^2+w_1^2}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(1+v_n)^2+w_n^2}.$$

Nimmt man nun m so gross an, dass für jeden Werth von n, welcher $\geqq m$ ist, die Summe der absoluten Beträge von v_n und w_n kleiner als 1 ist, so kann man

$$\sqrt{(1+v_n)^2+w_n^2} = 1+v_n+\varepsilon_n w_n$$

setzen, wo ε_n dasselbe Zeichen wie w_n hat, dem absoluten Betrage nach aber kleiner als 1 ist. Bezeichnet man darauf den absoluten Betrag von v_n durch v_n', so liegt $\frac{s_n}{s_m}$, wenn $n > m$ ist, zwischen den Grenzen

$$(1-v_{m+1}'-\varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1-v_{m+2}'-\varepsilon_{m+2}w_{m+2})\ldots\ldots(1-v_n'-\varepsilon_n w_n)$$

und

$$(1+v_{m+1}'+\varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1+v_{m+2}'+\varepsilon_{m+2}w_{m+2})\ldots\ldots(1+v_n'+\varepsilon_n w_n).$$

Beide Producte nähern sich aber, wenn n ohne Ende wächst, zufolge des Satzes (I.), bestimmten positiven Grenzen; also bleibt der Werth von $\frac{s_n}{s_m}$, und daher auch der Werth von s_n oder $\sqrt{p_n^2+q_n^2}$ stets zwischen zwei endlichen Grenzen, wie gross auch n werden mag. Mithin muss es auch für jede der Grössen p_n, q_n eine Grenze geben, welche der absolute Betrag der Grösse nicht übersteigen kann.

Nun ist aber

$$p_{n+1}+iq_{n+1} = (1+v_{n+1}+iw_{n+1})(p_n+iq_n)$$

und

$$\begin{aligned} p_{n+1}-p_n &= v_{n+1}p_n - w_{n+1}q_n, \\ q_{n+1}-q_n &= v_{n+1}q_n + w_{n+1}p_n; \end{aligned}$$

woraus, wenn man statt n der Reihe nach $m, m+1, \ldots m+r-1$ setzt,

$$\begin{aligned} p_{m+r}-p_m = &+ v_{m+1}p_m + v_{m+2}p_{m+1} + \cdots + v_{m+r}p_{m+r-1} \\ &- w_{m+1}q_m - w_{m+2}q_{m+1} - \cdots - w_{m+r}q_{m+r-1} \\ q_{m+r}-q_m = &+ v_{m+1}q_m + v_{m+2}q_{m+1} + \cdots + v_{m+r}q_{m+r-1} \\ &+ w_{m+1}p_m + w_{m+2}p_{m+1} + \cdots + w_{m+r}p_{m+r-1} \end{aligned}$$

folgt. Es hat aber jede der Reihen

$$\begin{aligned} &v_0, v_1, v_2, \ldots \\ &w_0, w_1, w_2, \ldots \end{aligned}$$

unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe; und da die absoluten Beträge von p_n, q_n, wie gross auch n werden mag, gewisse Grenzen nicht übersteigen, so müssen auch die Reihen

$$\begin{aligned} &p_0v_1, p_1v_2, \ldots; \quad p_0w_1, p_1w_2, \ldots \\ &q_0v_1, q_1v_2, \ldots; \quad q_0w_1, q_1w_2, \ldots \end{aligned}$$

endliche Summen haben. Folglich kann man m so gross werden lassen, dass für jeden Werth von r die Ausdrücke auf der Rechten der vorstehenden Gleichungen, also auch $p_{m+r}-p_m$ und $q_{m+r}-q_m$, dem absoluten Betrage nach, kleiner als jede gegebene Grösse sind. Damit aber ist bewiesen, das p_n, q_n nicht blos endlich bleiben, wenn n ohne Ende wächst, sondern auch dass jede dieser beiden Grössen gegen eine bestimmte Grenze convergirt. Ferner ist klar, dass diese Grenzen nicht beide gleich Null sein können, weil sonst $s_n = \sqrt{p_n^2+q_n^2}$ für $n=\infty$ ebenfalls gleich Null sein würde; was, wie vorhin gezeigt, nicht der Fall ist, wofern nicht eine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich -1 ist. Dieser Fall aber kann ganz ausgeschlossen bleiben, weil dann P_n, für jeden Werth von n von einem bestimmten Werthe an, gleich Null sein würde.

(V.) Nicht selten trifft man eine unendliche Reihe an, deren Glieder

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

ein solches Gesetz befolgen, dass sich der Quotient $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ in eine (endliche

oder unendliche) Reihe von der Form

$$1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}+\cdots$$

entwickeln lässt, wo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von n unabhängig sind, übrigens aber beliebige complexe Werthe haben können, auf die Weise, dass

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Lim} n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)=a_1\\
&\operatorname{Lim} n^2\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1-\frac{a_1}{n}\right)=a_2\\
&\operatorname{Lim} n^3\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1-\frac{a_1}{n}-\frac{a_2}{n^2}\right)=a_3
\end{aligned}\right\}\ \text{für } n=\infty$$

u. s. w. ist.

Wenn in diesem Falle a_μ die erste der Grössen $a_1, a_2, \ldots$ ist, welche nicht verschwindet, so dass

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} n^\mu\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)=a_\mu$$

ist, und es ist erstens $\mu>1$, so wird u_n, wenn n ohne Ende zunimmt, gegen eine bestimmte, endliche und von Null verschiedene Grenze convergiren. Wird dieselbe durch u bezeichnet, so kann man ferner

$$u_n=u+\frac{v_n}{n^{\mu-1}}$$

setzen, wo v_n eine Grösse ist, die endlich bleibt, wie gross auch n werden mag.

Setzt man

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=1+\frac{k_n}{n^\mu},$$

so erhält man

$$u_n=u_0\left(1+\frac{k_1}{1^\mu}\right)\left(1+\frac{k_2}{2^\mu}\right)\cdots\left(1+\frac{k_n}{n^\mu}\right).$$

Nun ist aber $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} k_n=a_\mu$; es bleibt mithin k_n endlich, wie gross auch n werden mag. Daraus folgt, dass die Reihe

$$\frac{k_1}{1^\mu}, \frac{k_2}{2^\mu}, \cdots \frac{k_n}{n^\mu}, \cdots$$

unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe hat, weil dies für die Reihe

$$1, \frac{1}{2^\mu}, \frac{1}{3^\mu}, \cdots \frac{1}{n^\mu}, \cdots$$

gilt, was bereits für $\mu = 2$ im Zusatze zu No. II gezeigt wurde, und daher auch feststeht, wenn $\mu > 2$ ist. Damit ist aber nach No. IV erwiesen, dass u_n für $n = \infty$ einen bestimmten endlichen, von Null verschiedenen Werth annimmt.

Bei diesem Beweise ist allerdings vorausgesetzt worden, dass keine der Grössen $u_0, u_1, \ldots$ gleich Null sei; der Satz bleibt aber gültig, wenn diese Bedingung nur für alle Grössen der Reihe von einer bestimmten u_m an erfüllt ist. Setzt man nämlich $n = m + r$, so ist

$$\frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}} = 1 + \frac{a_\mu}{(r+m)^\mu} + \frac{a_{\mu+1}}{(r+m)^{\mu+1}} + \cdots,$$

woraus, sobald $r > m$ ist,

$$\frac{u_{m+r}}{u_{m+r-1}} = 1 + \frac{a_\mu}{r^\mu} + \frac{a'_{\mu+1}}{r^{\mu+1}} + \cdots$$

folgt, wo $a_\mu, a'_{\mu+1}, \ldots$ von r unabhängig sind. Mithin bekommt u_{m+r} für $r = \infty$ einen endlichen, von Null verschiedenen Werth.

Ist nun

$$\lim_{n=\infty} u_n = u,$$

so setze man

$$u_n = v_n + iw_n, \qquad k_n = g_n + ih_n;$$

alsdann hat man:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{g_n + ih_n}{n^\mu}(v_{n-1} + iw_{n-1}),$$

und daher, wenn man

$$g_n v_{n-1} - h_n w_{n-1} = p_n, \qquad g_n w_{n-1} + h_n v_{n-1} = q_n$$

setzt,

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{p_{n+1} + iq_{n+1}}{(n+1)^\mu}.$$

Setzt man nun der Reihe nach $n+1, n+2, \ldots n+r-1$ statt n, wo r irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, und addirt die so entstehenden Gleichungen

zu der vorstehenden, so ergiebt sich:

$$u_n - u_{n+r} = -\frac{p_{n+1}+iq_{n+1}}{(n+1)^\mu} - \cdots - \frac{p_{n+r}+iq_{n+r}}{(n+r)^\mu},$$

oder auch, wenn

$$\sigma_{n,r} = \frac{1}{(n+1)^\mu} + \cdots + \frac{1}{(n+r)^\mu}$$

ist, und $P_{n,r}$ einen Mittelwerth zwischen der grössten und der kleinsten der Grössen $p_{n+1}, \ldots p_{n+r}$, und ebenso $Q_{n,r}$ einen Mittelwerth zwischen der grössten und kleinsten der Grössen $q_{n+1}, \ldots q_{n+r}$ bezeichnet:

$$u_n - u_{n+r} = -(P_{n,r}+iQ_{n,r})\cdot\sigma_{n,r}.$$

Lässt man nun r ohne Ende wachsen, während n constant bleibt, so nähert sich u_{n+r} der Grenze u; ebenso nähert sich $\sigma_{n,r}$ einer Grenze, die durch σ_n bezeichnet werden möge, und deshalb müssen auch $P_{n,r}$, $Q_{n,r}$ gegen bestimmte Grenzen convergiren, welche P_n, Q_n sein mögen. Man erhält daher

$$u_n = u - \sigma_n(P_n+iQ_n),$$

und es ist klar, dass P_n, Q_n endlich bleiben, wie gross auch n werden mag, da dies für g_n, h_n, v_n, w_n, also auch für p_n, q_n der Fall ist, und daher Grenzen existiren müssen, die $P_{n,r}$ und $Q_{n,r}$ und mithin auch P_n, Q_n, dem absoluten Betrage nach, nicht übersteigen können. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \frac{1}{(n+3)^\mu} + \cdots\cdots \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} + \frac{1}{(n+2)^2(n+2)^{\mu-2}} + \cdots\cdots \\
&\leqq \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\cdots\right)\cdot\frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} \\
&< \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots\right)\cdot\frac{1}{n^{\mu-2}},
\end{aligned}$$

also

$$\sigma_n < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots\right)\cdot\frac{1}{n^{\mu-2}},$$

d. h.

$$\sigma_n < \frac{1}{n^{\mu-1}}.$$

Man kann also $\sigma_n = \frac{\varepsilon_n}{n^{\mu-1}}$ setzen, wo ε_n ein echter Bruch ist, und wenn man $\varepsilon_n(P_n+iQ_n)$ durch $-v_n$ bezeichnet, so hat man:

$$u_n = u + \frac{v_n}{n^{\mu-1}},$$

und es bleibt v_n endlich, wie gross auch n werden mag.

(VI.) Wenn aber zweitens a_1 nicht Null ist, so sind drei Fälle zu unterscheiden.

(A.) Ist der reelle Theil von a_1 positiv, so wird u unendlich für $n = \infty$;

(B.) Ist der reelle Theil von a_1 Null, so bleibt zwar u_n endlich, wie gross auch n werden mag, nähert sich aber, wenn n beständig zunimmt, keiner bestimmten Grenze.

(C.) Ist der reelle Theil von a_1 negativ, so wird $u_n = 0$ für $n = \infty$.

Es sei $a_1 = g + hi$ und es werde

$$p_n = \left(1+\frac{g}{m}\right)\left(1+\frac{g}{m+1}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{g}{m+n}\right),$$
$$q_n = \left(1+\frac{hi}{m}\right)\left(1+\frac{hi}{m+1}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{hi}{m+n}\right)$$

gesetzt, wo m eine ganze positive Zahl bedeuten soll, die grösser ist als der absolute Betrag sowohl von g als auch von h. Dann hat man:

$$\frac{u_n}{p_n q_n} : \frac{u_{n-1}}{p_{n-1} q_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1} q_{n-1}}{p_n q_n}$$
$$= \left(1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{g}{n+m}\right)^{-1}\left(1+\frac{hi}{n+m}\right)^{-1}$$
$$= \left(1+\frac{a_1}{n}+\cdots\right)\left(1-\frac{g}{n}+\cdots\right)\left(1-\frac{hi}{n}+\cdots\right)$$
$$= 1+\frac{a_2'}{n^2}+\cdots,$$

wo a_2' u. s. w. von n unabhängig ist. Mithin convergirt, nach dem vorhergehenden Satze, $\frac{u_n}{p_n q_n}$, wenn n beständig zunimmt, gegen eine bestimmte end-

liche und von Null verschiedene Grenze, und man kann

$$\frac{u_n}{p_n q_n} = v + \frac{v_n}{n},$$

also

$$u_n = p_n q_n \cdot \left(v + \frac{v_n}{n}\right)$$

setzen, wo v von n unabhängig ist, v_n aber stets endlich bleibt.

Setzt man $q_n = q'_n + iq''_n$, so hat man

$$q'_n q'_n + q''_n q''_n = \left(1+\frac{h^2}{m^2}\right)\left(1+\frac{h^2}{(m+1)^2}\right)\cdots\left(1+\frac{h^2}{(m+n)^2}\right),$$

und es nähert sich diese Grösse nach No. I, wenn n ohne Ende wächst, einer bestimmten, von Null verschiedenen Grenze, weil die Reihe

$$\frac{h^2}{m^2}, \quad \frac{h^2}{(m+1)^2}, \cdots$$

eine endliche Summe hat. Mithin bleiben auch q'_n und q''_n stets endlich.

Bezeichnet man $\frac{h}{m+n}$ durch t_n, so hat man

$$q'_n + iq''_n = (1+it_n)(q'_{n-1} + iq''_{n-1}),$$

also

$$\begin{aligned} q'_n - q'_{n-1} &= -t_n q''_{n-1}, \\ q''_n - q''_{n-1} &= \quad t_n q'_{n-1}. \end{aligned}$$

Setzt man in diesen Gleichungen statt n der Reihe nach $n, n+1, \ldots n+r$ und addirt die so sich ergebenden Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} q'_{n+r} - q'_{n-1} &= -(t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{n+r})\, q''_{n,r} \\ q''_{n+r} - q''_{n-1} &= \quad (t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{n+r})\, q'_{n,r}, \end{aligned}$$

wo

$q'_{n,r}$ einen Mittelwerth der Grössen $q'_{n-1}, q'_n, \ldots q'_{n+r-1}$

und

$q''_{n,r}$ einen Mittelwerth der Grössen $q''_{n-1}, q''_n, \ldots q''_{n+r-1}$

bedeutet. Nun bleiben aber die Werthe der Grössen auf der Linken dieser Gleichungen stets endlich, während die Summe

$$t_n + t_{n+1} + \cdots + t_{n+r} = \frac{h}{m+n} + \frac{h}{m+n+1} + \cdots + \frac{h}{m+n+r},$$

wenn r wächst und n constant bleibt, über jede Grenze hinaus zunimmt. Daher müssen $q'_{n,r}$, $q''_{n,r}$ beide sich der Null nähern, wenn r ohne Ende zunimmt, n aber unverändert bleibt.

Es werde nun n so gross angenommen, dass die Differenz zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern der Reihe q'_{n-1}, q'_n, q'_{n+1}, ... dem absoluten Betrage nach kleiner sei als eine beliebig angenommene, noch so kleine Zahl E; was möglich ist, weil

$$q'_{n+r} - q'_{n+r-1} = -t_{n+r} q''_{n+r-1},$$

und t_{n+r} beliebig klein werden kann, wenn nur n gross genug angenommen wird, während q''_{n+r-1} stets endlich bleibt. Ferner sei r so gross, dass auch der absolute Betrag von $q'_{n,r}$ kleiner als E ist. Haben dann in der Reihe q'_{n-1}, q'_n, ... q'_{n+r-1} sämmtliche Glieder dasselbe Zeichen, so ist $q'_{n,r}$ dem absoluten Betrage nach grösser als das kleinste derselben; dieses muss daher von Null weniger verschieden sein als E. Im entgegengesetzten Fall aber muss es zwei unmittelbar auf einander folgende Glieder von verschiedenen Zeichen geben, und da die Differenz derselben kleiner als E ist, so folgt, dass jedes von ihnen kleiner als E ist. Man sieht also, dass man, wenn man in der Reihe q'_0, q'_1, ... von irgend einem Gliede aus weiter geht, stets auf eines kommen muss, das dem absoluten Betrage nach kleiner als jede gegebene Grösse ist. Dasselbe gilt für die Reihe q''_0, q''_1, ...

Nun nähert sich aber der Werth von $q'_n q'_n + q''_n q''_n$, wenn n beständig zunimmt, einer bestimmten Grenze G, und wenn daher wieder E eine beliebig kleine Grösse ist, so muss man, ausgehend von einem beliebigen Gliede der Reihe q_0, q_1, ..., unter den folgenden stets auf eines kommen, für welches die Bedingungen

$$G - E < q'_n q'_n + q''_n q''_n < G + E,$$
$$q''_n q''_n < E$$

erfüllt werden. Dann hat man

$$G - 2E < q'_n q'_n < G + E;$$

d. h. es muss auf jedes Glied der Reihe q'_0, q'_1, ..., wie weit vom Anfange entfernt es auch sei, stets wieder ein solches Glied folgen, welches seinem absoluten Betrage nach der Grenze $\sqrt{G}$ beliebig nahe kommt. Dasselbe gilt von den Gliedern der Reihe q''_0, q''_1, ...; und somit ist erwiesen, dass sich q_n

wenn n beständig wächst, keiner bestimmten Grenze nähert, sondern sowohl der reelle, als auch der imaginäre Theil dieser Grösse zwischen zwei verschiedenen endlichen Grenzen schwankt.

Für das Product p_n folgt unmittelbar aus No. II, in Verbindung mit dem Umstande, dass die Reihe

$$\frac{g}{m}, \frac{g}{m+1}, \cdots \frac{g}{m+n}, \cdots$$

keine endliche Summe hat:

$$\lim_{n=\infty} p_n = \infty, \text{ wenn } g \text{ positiv ist,}$$
$$\lim_{n=\infty} p_n = 0 \text{ , wenn } g \text{ negativ ist.}$$

Aus der Formel

$$u_n = \left(v + \frac{v_n}{n}\right) p_n q_n$$

ergiebt sich jetzt ohne Weiteres Folgendes:

1. Wenn g positiv ist, so wird der absolute Betrag von u_n unendlich gross für $n = \infty$;
2. Wenn g negativ ist, so wird derselbe unendlich klein für $n = \infty$;
3. Wenn g gleich Null ist, so nähert sich derselbe, wenn n beständig zunimmt, zwar einer bestimmten Grenze, aber da dann

$$u_n = vq_n + \frac{v_n q_n}{n}$$

und

$$\lim_{n=\infty} \frac{v_n q_n}{n} = 0$$

ist, so convergirt u_n selbst gegen keinen bestimmten Werth, sondern schwankt.

Anmerkung. Setzt man, was hier absichtlich vermieden ist, die Theorie der Potenzen mit beliebigen Exponenten voraus, so lässt sich der vorstehende Satz viel kürzer begründen. Denn es ist

$$\frac{u_n}{n^{g+hi}} : \frac{u_{n-1}}{(n-1)^{g+hi}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{g+hi} = \left(1 + \frac{g+hi}{n} + \cdots\right)\left(1 - \frac{g+hi}{n} + \cdots\right)$$
$$= \left(1 + \frac{a_2'}{n^2} + \cdots\right),$$

folglich nähert sich, wenn n ohne Ende zunimmt, $\frac{u_n}{n^{g+hi}}$ nach No. V einer

bestimmten, von Null verschiedenen Grenze; und wenn man dieselbe durch v bezeichnet, so kann man

$$\frac{u_n}{n^{g+hi}} = v + \frac{v_n}{n},$$

oder

$$u_n = n^g \cdot \left(v + \frac{v_n}{n}\right)[\cos(h \log n) + i \sin(h \log n)]$$

setzen, wo v_n stets endlich bleibt. Aus dieser Formel folgt der zu beweisende Satz unmittelbar.

(VII.) Wenn wieder

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{g+hi}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots$$

ist, so weiss man, dass die Summe

(A.) $$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n,$$

wenn n ohne Ende zunimmt, gegen eine bestimmte endliche Grenze convergirt, sobald der absolute Betrag von x kleiner als 1 ist; so wie auch, dass sie divergirt, wenn der genannte Betrag grösser als 1 ist. Beides gilt auch, wenn t_n den absoluten Betrag von u_n, ξ den von x bedeutet, für die Summe

(B.) $$t_0 + t_1 \xi + t_2 \xi^2 + \cdots + t_n \xi^n.$$

Ist aber der absolute Betrag von x gleich 1, so gelten folgende Sätze.

1) Die Summe (A.) convergirt, wofern nicht $x = 1$ ist, sobald g negativ, die Summe (B.) aber nur, wenn $g < -1$ ist.
2) Wenn aber $x = 1$ ist, so convergirt die Reihe (A.) — und dann gleichzeitig auch (B.) — nur in dem Falle, wo $g < -1$ ist; sie bleibt zwar endlich, wie gross auch n werden mag, nähert sich aber keiner bestimmten Grenze, wenn $g = -1$ und $h \lesseqgtr 0$ ist; und divergirt in jedem anderen Falle.
3) Beide Reihen divergiren, wenn $g \gtreqless 0$ ist, indem dann weder $u_n x^n$, noch $t_n \xi$, für $n = \infty$ unendlich klein werden.

Da der absolute Betrag von x der Einheit gleich sein soll, so ist die Summe (B.) gleich

$$t_0 + t_1 + \cdots + t_n.$$

Ferner, wenn

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1+\frac{g+hi}{n}+\frac{g'+h'i}{n^2}+\cdots$$

ist, so hat man

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \sqrt{\left(1+\frac{g}{n}+\frac{g'}{n^2}+\cdots\right)^2+\left(\frac{h}{n}+\frac{h'}{n^2}+\cdots\right)^2}$$
$$= 1+\frac{g}{n}+\cdots.$$

Setzt man nun, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, die grösser ist als der absolute Betrag von g, wieder

$$p_n = \left(1+\frac{g}{m}\right)\left(1+\frac{g}{m+1}\right)\cdots\left(1+\frac{g}{m+n}\right),$$

so kann man (nach No. VI), wenn man t_n an die Stelle der dort mit u_n bezeichneten Grösse treten lässt, wo dann $q_n = 1$ wird,

$$t_n = \left(t+\frac{t'_n}{n}\right)p_n$$

setzen, wo t von n unabhängig ist, t'_n aber stets endlich bleibt.

Nun ist

$$p_n - p_{n-1} = \frac{g}{m+n}\cdot p_{n-1},$$
$$(m+n).p_n-(m+n-1).p_{n-1} = (g+1).p_{n-1};$$

setzt man also in dieser Gleichung statt n der Reihe nach 1, 2, ... n, so erhält man durch Zusammenziehung der so entstehenden Gleichungen:

$$(m+n)p_n - mp_0 = (g+1)(p_0+p_1+\cdots+p_{n-1}).$$

Aus dieser Gleichung aber ist zu ersehen, dass es, wofern nicht $g+1=0$ ist, zur Convergenz der Summe

$$p_0+p_1+\cdots+p_{n-1}$$

hinreichend und nothwendig ist, dass $(m+n)p_n$ einer bestimmten Grenze sich nähere, wenn n beständig zunimmt. Dies kann aber, da

$$\frac{(m+n)p_n}{(m+n-1)p_{n-1}} = \left(1+\frac{g}{m+n}\right)\left(1-\frac{1}{m+n}\right)^{-1}$$
$$= \left(1+\frac{g}{n}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{n}+\cdots\right)$$
$$= 1+\frac{g+1}{n}+\cdots$$

ist, nur dann geschehen, wenn $g+1$ negativ ist (indem der Fall $g+1=0$ ausgeschlossen ist), wo dann $(m+n)p_n$ für $n=\infty$ (gemäss No. VI) unendlich klein wird.

Ist $g+1=0$, so hat man

$$p_n = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m+n}\right) = \frac{m-1}{m+n}$$

und

$$p_0+p_1+\cdots+p_n = (m-1)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right).$$

Diese Summe ist aber (No. II Zus.) divergent. Mithin ist es zur Convergenz der Summe

$$p_0+p_1+\cdots+p_n$$

nothwendig und hinreichend, dass $g<-1$ sei.

Nun ist aber

$$t_0+t_1+\cdots+t_n = t_0+t(p_1+\cdots+p_n)+(t_1'p_1)+\frac{1}{2}(t_2'p_2)+\cdots+\frac{1}{n}(t_n'p_n).$$

Wenn daher $g<-1$ ist, so wird auch $t_0+t_1+\cdots+t_n$ convergiren, indem

$$(t_1'p_1)+\frac{1}{2}(t_2'p_2)+\cdots+\frac{1}{n}(t_n'p_n)$$

gleichzeitig mit $p_1+p_2+\cdots+p_n$ convergirt.

Ist $g\gtreqless -1$, aber <0, so divergirt von diesen beiden letzten Summen die zweite, während die erste, da

$$\frac{p_n}{n}:\frac{p_{n-1}}{n-1} = \frac{p_n}{p_{n-1}}\cdot\frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{g}{n}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{g-1}{n}+\cdots$$

ist, noch convergirt; folglich divergirt auch $t_0+t_1+\cdots+t_n$. Dasselbe findet statt, wenn $g\gtreqless 0$ ist, weil dann t_n für $n=\infty$ nicht unendlich klein wird. Man sieht also, dass die Reihe (B.) convergirt oder divergirt, je nachdem $g<-1$ ist oder nicht.

Zur Convergenz der Summe (A.) ist zunächst erforderlich, dass $\operatorname{Lim}_{n=\infty} t_n = 0$ sei, weshalb $g<0$ sein muss. Dies vorausgesetzt, werde

$$\left(1+\frac{g+hi}{m}\right)\left(1+\frac{g+hi}{m+1}\right)\cdots\left(1+\frac{g+hi}{m+n}\right) = P_n$$

gesetzt, so hat man:

$$\frac{u_n}{P_n}:\frac{u_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{P_{n-1}}{P_n} = \left(1+\frac{g+hi}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{g+hi}{m+n}\right)^{-1} = 1+\frac{a_2'}{n^2}+\cdots.$$

Mithin kann man (nach No. V)

$$u_n = P_n\left(v+\frac{w_n}{n}\right)$$

setzen, wo wieder v von n unabhängig ist, w_n aber stets endlich bleibt. Ferner sei

$$s_n = u_1x+u_2x^2+\cdots+u_nx^n$$

$$S_n = P_1x+P_2x^2+\cdots+P_nx^n$$

$$S_n' = w_1P_1x+\frac{1}{2}w_2P_2x^2+\cdots+\frac{1}{n}w_nP_nx^n;$$

dann hat man

$$s_n = vS_n+S_n'.$$

Nun ist

$$\frac{P_n}{n}:\frac{P_{n-1}}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{g+hi}{n}+\cdots\right) = 1+\frac{g-1+hi}{n}+\cdots,$$

und da $g-1<-1$ ist, so convergirt, wenn man durch Q_n den absoluten Betrag von P_n bezeichnet, nach dem vorher Bewiesenen die Summe

$$\frac{1}{1}Q_1+\frac{1}{2}Q_2+\cdots+\frac{1}{n}Q_n,$$

und daher auch, indem x^nw_n stets endlich bleibt, S_n'. Daraus folgt, dass s_n gleichzeitig mit S_n convergirt, schwankt oder divergirt.

Es ist aber

$$(1-x)S_n = P_1x+(P_2-P_1)x^2+(P_3-P_2)x^3+\cdots+(P_n-P_{n-1})x^n-P_nx^{n+1}$$

$$= P_1x+(g+hi)\cdot\left\{\frac{P_1}{m+2}x+\frac{P_2}{m+3}x^2+\cdots+\frac{P_{n-1}}{m+n}x^{n-1}\right\}x-P_nx^{n+1}.$$

Die eingeklammerte Summe convergirt, was gerade so gezeigt wird, wie für S_n', und es ist $\operatorname{Lim}_{n=\infty} P_n = 0$, weil g negativ angenommen worden; folglich wird auch $(1-x)S_n$, und, wenn nicht $1-x=0$, auch S_n convergiren.

Die Summe (A.) convergirt also stets, wenn $g<0$, und nicht $x=1$ ist.

Wenn aber $x = 1$, so hat man

$$S_n + P_0 = P_0 + P_1 + \cdots + P_n = \frac{(m+n+1)\,P_{n+1} - m\,.\,P_0}{g+hi+1};$$

wie sich unmittelbar aus der im Vorhergehenden gefundenen Formel für die Summe $p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}$ ergiebt, wenn man in derselben $g+hi$ für g und $n+1$ statt n setzt. Es wird daher, wofern nicht etwa $g = -1$ und zugleich $h = 0$ ist, S_n convergiren, wenn sich $(m+n+1)\,P_{n+1}$ bei beständig zunehmendem Werthe von n einer bestimmten Grenze nähert. Dies kann, da

$$\frac{(m+n+1)\,P_{n+1}}{(m+n)\,P_n} = \left(1+\frac{g+hi}{m+n+1}\right)\left(1+\frac{m+1}{n}\right)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{-1} = 1+\frac{g+1+hi}{n}+\cdots$$

ist, nur geschehen, wenn $g+1 < 0$ ist, indem der Fall $g+1 = 0$, $h = 0$ ausgeschlossen ist.

Ist $g+1 = 0$ und $h = 0$, so ist die Divergenz der Summe $P_0 + P_1 + \cdots + P_n$ bereits im Vorhergehenden bewiesen.

Folglich convergirt, wofern $x = 1$ ist, die Summe (A.) nur, gleichzeitig mit der Summe (B.), wenn $g < -1$ ist.

Wenn $g = -1$ und $h \lesseqgtr 0$, so bleibt der Werth von $(m+n+1)\,P_{n+1}$ nach No. VI zwar stets endlich, nähert sich aber keiner bestimmten Grenze. Dasselbe gilt also auch von S_n und von der Summe (A.).

Wenn endlich $g > -1$, also $g+1 > 0$ ist, so wird der Werth von $(m+n+1)\,P_{n+1}$ unendlich gross für $n = \infty$. Mithin divergirt in diesem Falle S_n, und auch die Summe (A.).

Damit ist der aufgestellte Satz in allen seinen Theilen erwiesen.

Anm. 1. Setzt man statt u_n den in der Anm. zu No. VI gegebenen Ausdruck $u_n = vn^{g+hi} + v_n n^{g-1+hi}$, so ist leicht zu sehen, dass die Summe (A.) gleichzeitig mit der folgenden:

$$1 + x + x^2 2^{g+hi} + x^3 3^{g+hi} + \cdots + x^n n^{g+hi}$$

convergirt, schwankt, oder divergirt.

Anm. 2. Die Sätze V bis VII stimmen, wenn man den in ihnen vorkommenden Grössen nur reelle Werthe beilegt, im Wesentlichen mit denen überein, welche Gauss in der Abhandlung »Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots \text{«}$$

begründet hat. Mit der hier gegebenen Erweiterung dienen sie für eine grosse Menge von unendlichen Reihen, die in der Analysis vorkommen, zur Entscheidung über die Convergenz oder Divergenz derselben. Aus diesem Grunde habe ich sie ausführlicher entwickelt, als gerade für den nächsten Zweck nöthig gewesen wäre. Übrigens würden sie sich ohne Mühe noch bedeutend verallgemeinern lassen.

6.

Jetzt zurückkehrend zu der Gleichung (43.) des § 4, gebe ich, da

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{(u+nx)^y}{(nx)^y}\right\}=1^y$$

und

$$\frac{(u,+x)^n}{(u+yx,+x)^n}=\frac{u(u+x)(u+2x)\ldots..(u+(n-1)x)}{(u+yx)(u+yx+x)\ldots..(u+(y+n-1)x)}$$

$$=\frac{\frac{u}{x}\left(1+\frac{u}{x}\right)\left(1+\frac{u}{2x}\right)\ldots..\left(1+\frac{u}{(n-1)x}\right)}{\left(\frac{u+yx}{x}\right)\left(1+\frac{u+yx}{x}\right)\left(1+\frac{u+yx}{2x}\right)\ldots..\left(1+\frac{u+yx}{(n-1)x}\right)}$$

ist, indem ich

$$n^{-u}u\left(1+u\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots..\left(1+\frac{u}{n-1}\right)=F(u,n) \tag{44.}$$

setze, derselben die Form:

$$f(u)=x^y\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{F\left(\frac{u}{x},n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+y,n\right)}\right\}\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}\right\}. \tag{45.}$$

Nun ist

$$\frac{F(u,n)}{F(u,n-1)}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-u}\left(1+\frac{u}{n-1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)^u\left(1+\frac{u}{n-1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u-1)}{2n^2}-\ldots..\right)\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\ldots..\right)$$

$$=1-\frac{u(u-1)}{2n^2}+\ldots..,$$

also convergirt $F(u,n)$, wenn n ohne Ende zunimmt, gemäss No. V des § 5, gegen eine bestimmte endliche Grenze, welchen Werth auch u haben mag. Bezeichnet man diese Grenze, die eine Function von u ist, durch $Fc(u)$, so hat man:

$$(46.) \qquad Fc(u) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{n^{-u}u\left(1+u\right)\left(1+\frac{u}{2}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{u}{n-1}\right)\right\},$$

oder

$$(47.) \qquad Fc(u) = u\prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{u}\left(1+\frac{u}{\alpha}\right)\right\}.$$

Es erhellt aus diesen Formeln zugleich, dass $Fc(u)$ nur verschwindet, wenn u der Null oder einer negativen ganzen Zahl gleich ist.

Hiernach ist

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{F\left(\frac{u}{x},n\right)}{F\left(\frac{u}{x}+y,n\right)} = \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)},$$

und es muss daher, der Gleichung (45.) gemäss, wenn es wirklich eine Function $f(u)$ giebt, die der Gleichung (41.) genügt, $\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y}$ einer bestimmten endlichen Grenze sich nähern, wenn n beständig zunimmt — wenigstens wofern nicht $Fc\left(\frac{u}{x}\right) = 0$ ist.

Bezeichnet man diese Grenze, als Function von u betrachtet, durch $\psi(u)$, so muss

$$(48.) \qquad \psi(u+x) = \psi(u)$$

sein, da

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{f(u+x+nx)}{(u+x+nx)^y}$$

ist, und es ergiebt sich

$$(49.) \qquad f(u) = x^y\frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}\psi(u).$$

Umgekehrt lässt sich nun erweisen, dass jede Function von u, welche durch diese Formel dargestellt wird, wenn nur $\psi(u)$ die in der Gleichung (48.)

ausgesprochene Eigenschaft hat, der Gleichung (41.) genügt.*) Denn es ist

$$uF(u+1,n) = n^{-u-1}\frac{u(u+1)(u+2).....(u+n)}{1.2.....(n-1)} = \frac{u+n}{n}F(u,n),$$

woraus für $n = \infty$

(50.) $$Fc(u) = uFc(u+1)$$

folgt. Mithin ist

$$f(u+x) = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+1\right)}\psi(u+x) = \frac{u+yx}{u}f(u),$$

oder

$$\frac{f(u+x)-f(u)}{f(u)} = \frac{yx}{u},$$

welches die Gleichung (41.) ist.

Um nun die Function $\psi(u)$ zweckmässig zu bestimmen, kann man die Forderung stellen, es solle, sowie für die Function $(u,+x)^y$, falls y eine ganze positive Zahl ist, die Gleichung

$$\lim_{n=\infty}\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} = 1^y$$

gilt, der Function $f(u)$ für jeden Werth von y die durch die Gleichung

$$\lim_{n=\infty}\frac{f(u+nx)}{(u+nx)^y} = 1^y$$

ausgesprochene Eigenschaft zukommen.

Dann muss nach dem Vorhergehenden $\psi(u) = 1^y$ sein und somit $f(u)$ durch die Formel

(51.) $$f(u) = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)}$$

definirt werden.

Nun ist (in § 2) mittels der beiden, aus (50.) und (47.) folgenden Gleichungen

(52.) $$Fc(u) = u(u+1).....(u+n-1)Fc(u+n)$$

(53.) $$Fc(1) = 1$$

*) Es ist zu bemerken, dass bei der Herleitung der Formel (49.) die Grössen x, y als Constanten betrachtet worden sind und deshalb $\psi(u)$ anzusehen ist als eine von u und von x, y abhängende Grösse, die, als Function von u betrachtet, der Gleichung (48.) genügt.

gezeigt worden, dass

$$\text{(54.)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{n^{-u}Fc(n)}{Fc(u+n)}\right\} = 1$$

ist; wobei zu bemerken, dass hier, wie auch in (46.),

$$n^{-u} = e^{-u\log n} = 1 - u\log n + \frac{u^2\log^2 n}{1.2} - \cdots\cdots$$

zu setzen ist, unter der Bedingung, dass von den verschiedenen Werthen von $\log n$ der reelle genommen werde, so dass also $Fc(u)$ eine eindeutige Function von u ist.

Hiernach ist, wenn man jetzt für die durch die Gleichung (51.) definirte Function $f(u)$ die Bezeichnung $(u,+x)^y$ einführt,

$$(u+nx,+x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)},$$

$$\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} = \frac{(nx)^y}{(u+nx)^y}\left\{\frac{n^{-\frac{u}{x}-y}Fc(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y+n\right)} : \frac{n^{-\frac{u}{x}}Fc(n)}{Fc\left(\frac{u}{x}+n\right)}\right\};$$

mithin ist für jeden Werth von y in der That:

$$\text{(55.)} \qquad \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y}\right\} = 1^y.$$

Hinsichtlich der Function $Fc(u)$ ist noch zu bemerken, dass sie durch die Gleichungen (50.), (53.), (54.) vollständig bestimmt wird. Denn aus (50.) und (53.) folgt

$$Fc(u) = \frac{u(u+1)\ldots\ldots(u+n-1)}{1.2\ldots\ldots(n-1)}\,\frac{Fc(n+u)}{Fc(n)};$$

woraus sich mittels (54.) die Formel (46.) ergiebt.

Durch das Vorstehende sind also jetzt folgende Resultate erlangt:

I. Es giebt eine, und zwar nur eine, für alle Werthe der unbeschränkt veränderlichen Grösse u definirte, eindeutige und für keinen endlichen Werth von u unendlich gross werdende Function

$Fc(u)$, welche die in den Gleichungen

$$(56.)\qquad \begin{cases} Fc(u) = uFc(u+1), \\ Fc(1) = 1, \\ \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}} \dfrac{n^{-u}Fc(n)}{Fc(u+n)} = 1 \end{cases}$$

ausgesprochenen Eigenschaften hat und durch die Formel

$$Fc(u) = u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right) \right\}$$

dargestellt wird.

II. Es giebt eine, und zwar nur eine, von drei unbeschränkt veränderlichen Argumenten, der Basis u, der Differenz x und dem Exponenten y, abhängige und durch $(u,+x)^y$ bezeichnete Function, welche der Gleichung

$$(57.)\qquad \frac{\Delta(u,+x)^y}{(u,+x)^y} = \frac{yx}{u},$$

in der sich das Zeichen Δ auf u bezieht und $\Delta u = x$ zu nehmen ist, genügt, und zugleich die in der Formel

$$(58.)\qquad \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}} \left\{ \frac{(u+nx,+x)^y}{(u+nx)^y} \right\} = 1^y$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzt. Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$(59.)\qquad (u,+x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+y\right)},$$

oder

$$(60.)\qquad (u,+x)^y = x^y \frac{u}{u+yx} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^y \frac{u+\alpha x}{u+(y+\alpha)x} \right\}.$$

Aus der Formel (59.) ergeben sich dann, wie in § 1 gezeigt worden, für $(u,+x)^y$ die Grundgleichungen

$$(61.)\qquad (u,+x)^{y+k} = (u,+x)^y (u+yx,+x)^k,$$

$$(62.) \qquad (u, +x)^{y-k} = \frac{(u, +x)^y}{(u+(y-k)x, +x)^k},$$

$$(63.) \qquad (ku, +kx)^y = k^y (u, +x)^y,$$

$$(64.) \qquad (u, +x)^1 = u,$$

aus welchen sich nun eine Reihe anderer herleiten lässt, z. B.

$$(65.) \qquad (u, +x)^0 = 1,$$

$$(66.) \qquad (u, +x)^{-y} = \frac{1}{(u-yx, +x)^y},$$

und insbesondere, wenn y eine positive ganze Zahl ist,

$$(67.) \qquad (u, +x)^y = u(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+(y-1)x),$$

$$(68.) \qquad (u, +x)^{-y} = \frac{1}{(u-x)(u-2x)\ldots\ldots(u-yx)}.$$

Ferner, wenn y, v, w beliebige Grössen bedeuten,

$$(69.) \qquad (u, +x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v, +w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}+y}}{(v, +w)^{\frac{u}{x}-\frac{v}{w}}}$$

u. s. w. (Vgl. Crelle's »Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques«.)

Ich bemerke noch, dass die Formel (43.), welche aus der Bestimmungsgleichung (57.) folgt, mittels der anderen (58.) unmittelbar zu dem Ausdrucke von $(u, +x)^y$ in der Form des unendlichen Products (60.) führt, dessen Convergenz nach dem Satze No. V. (§ 5) feststeht, sobald nicht $\frac{u}{x}+y$ Null oder eine negative ganze Zahl ist. Ist aber $\frac{u}{x}+y = -m$ (unter m eine ganze positive Zahl, Null eingeschlossen, verstanden), so folgt aus (69.), wenn man $v = 1$, $w = 1$ setzt:

$$(u, +x)^y = \frac{x^y (1, +1)^{-m-1}}{(1, +1)^{-y-m-1}};$$

da nun, nach (66.), $(1, +1)^{-m-1} = \infty$ ist, so sieht man, dass die Form $\frac{1}{0}$, welche in diesem Falle das Product (60.) annimmt, durch die Natur der Function $(u, +x)^y$ gefordert wird.

Nachdem auf die angegebene Weise eine Definition der Facultät $(u,+x)^y$ gefunden ist, die nicht mehr Bestimmungen enthält, als nöthig sind, und die alsbald zu einem allgemeinen Ausdrucke, sowie zu den wichtigsten Eigenschaften der Function führt, gelangt man auf einem ganz ähnlichen Wege zu der anderen Facultäten-Form $(u,-x)^y$; worunter, um wiederholt daran zu erinnern, nicht $(u,+(-x))^y$ verstanden werden soll.

Sie wird nämlich durch die beiden Gleichungen

$$(70.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Delta(u,-x)^y}{(u,-x)^y} = -\dfrac{yx}{u}, \\ \underset{n=\infty}{\mathrm{Lim}}\left\{\dfrac{(u+nx,-x)^y}{(u+nx)^y}\right\} = 1^y \end{cases}$$

definirt, wo aber jetzt $\Delta u = -x$ zu setzen ist.

Dann folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$\frac{(u-x,-x)^y-(u,-x)^y}{(u,-x)^y} = -\frac{yx}{u},$$

$$(u-x,-x)^y = \frac{u-yx}{u}(u,-x)^y,$$

und hieraus, wenn man $u+x$ statt u setzt:

$$(u,-x)^y = \frac{u+(1-y)x}{u+x}(u+x,-x)^y,$$

welche Gleichung zu der folgenden:

$$(u,-x)^y = \frac{u+(1-y)x}{u+x}\,\frac{u+(2-y)x}{u+2x}\cdots\cdots\frac{u+(n-y)x}{u+nx}(u+nx,-x)^y$$

$$= \frac{\left(\frac{u}{x}+1-y\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{1}\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1-y}{n-1}\right)}{\left(\frac{u}{x}+1\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{1}\right)\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{\frac{u}{x}+1}{n-1}\right)}(u+nx,-x)^y$$

führt. Setzt man statt $(u+nx,-x)^y$

$$x^y\frac{(u+nx,-x)^y}{(u+nx)^y}\,\frac{n^{-\frac{u}{x}+y-1}}{n^{-\frac{u}{x}-1}}\left(\frac{nx}{u+nx}\right)^{-y},$$

und dann $n = \infty$, so erhält man, gemäss (70.) und (46.):

$$(71.) \qquad (u,-x)^y = x^y \frac{Fc\left(\frac{u}{x}+1-y\right)}{Fc\left(\frac{u}{x}+1\right)},$$

oder auch

$$(72.) \qquad (u,-x)^y = x^y \frac{u+x-yx}{u+x} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^y \frac{u+(\alpha+1-y)x}{u+(\alpha+1)x} \right\}.$$

Zugleich lässt sich aus der Formel (71.) mittels der Eigenschaften der Function $Fc(u)$ ohne Weiteres beweisen, dass die durch dieselbe ausgedrückte Function $(u,-x)^y$ wirklich die in den Gleichungen (70.) ausgesprochenen Eigenschaften hat.

Es ergeben sich dann aus (71.) für $(u,-x)^y$ die Grundgleichungen:

$$(73.) \qquad (u,-x)^{y+k} = (u,-x)^y (u-yx,-x)^k,$$

$$(74.) \qquad (u,-x)^{y-k} = \frac{(u,-x)^y}{(u-(y-k)x,-x)^k},$$

$$(75.) \qquad (ku,-kx)^y = k^y (u,-x)^y,$$

$$(76.) \qquad (u,-x)^1 = u;$$

aus denen wieder die folgenden:

$$(77.) \qquad (u,-x)^0 = 1,$$

$$(78.) \qquad (u,-x)^{-y} = \frac{1}{(u+yx,-x)^y},$$

und insbesondere, wenn y eine positive ganze Zahl ist,

$$(79.) \qquad (u,-x)^y = u(u-x)(u-2x)\ldots\ldots(u-(y-1)x),$$

$$(80.) \qquad (u,-x)^{-y} = \frac{1}{(u+x)(u+2x)\ldots\ldots(u+yx)},$$

sowie, wenn y, v, w beliebige Grössen bedeuten,

$$(81.) \qquad (u,-x)^y = \left(\frac{x}{w}\right)^y \frac{(v,-w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}+y}}{(v,-w)^{\frac{v}{w}-\frac{u}{x}}}$$

u. s. w. hergeleitet werden.*) Ferner hat man:

$$(82.) \qquad \begin{cases} (u,-x)^y = (u+x-yx,+x)^y = \dfrac{1}{(u+x,+x)^{-y}}, \\ (u,+x)^y = (u-x+yx,-x)^y = \dfrac{1}{(u-x,-x)^{-y}}. \end{cases}$$

Setzt man endlich in (59.) $u = x = 1$, und $u-1$ für y, so findet sich

$$(83.) \qquad Fc(u) = \frac{1}{(1,+1)^{u-1}},$$

und wenn man in (71.) $u = 0$, $x = 1$ und $-u+1$ statt y setzt:

$$(84.) \qquad Fc(u) = (0,-1)^{1-u},$$

so dass also die Factorielle $Fc(u)$ selbst eine Facultät ist.

7.

Es ist oben angegeben worden, dass sich die Function $Fc(u)$ nach ganzen positiven Potenzen von u in eine beständig, d. h. für alle reellen und imaginären Werthe von u convergirende Reihe entwickeln lasse; sowie, dass die Reihe, in welche man die Facultät $(u,+x)^y$ nach steigenden Potenzen der Differenz x entwickeln kann, niemals convergirt, wenn y keine ganze Zahl ist. Es erscheint mir nicht unangemessen, auf die Rechtfertigung beider Behauptungen näher einzugehen.

Zu dem Ende stelle ich noch einige Sätze über die Convergenz der unendlichen Reihen zusammen, welche hier, sowie auch im Folgenden, zur Anwendung kommen.

1) Hat man eine unendliche Reihe von der Form

$$\sum a_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots,$$

wo $x, y, \ldots$ veränderliche Grössen sind und $\alpha, \beta, \ldots$ ganze Zahlen,

*) Es ist hierbei zu bemerken, dass, obwohl $(u,-x)^y$ nicht gleich $(u,+(-x))^y$ ist, gleichwohl alle Gleichungen, die ohne Zuziehung der zweiten Gleichung (70.) aus den Gleichungen (73.) bis (76.) folgen, aus den entsprechenden für $(u,+x)^y$ durch Verwandlung von x in $(-x)$ sich ergeben.

von denen jede, unabhängig von den andern, alle Werthe von 0 bis $+\infty$ durchläuft, und es bleiben die absoluten Beträge der Glieder der Reihe, wie gross auch $\alpha, \beta, \ldots$ werden mögen, sämmtlich kleiner als eine angebbare Grösse, wenn für $x, y, \ldots$ bestimmte Werthe $x_0, y_0, \ldots$ gesetzt werden; so convergirt die Reihe für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die ihrem absoluten Betrage nach beziehlich kleiner als $x_0, y_0, \ldots$ sind, und zwar unbedingt.*)

Bezeichnet man nämlich die absoluten Beträge von

$$a_{\alpha,\beta,\ldots}, \quad x, y, \ldots, \quad x_0, y_0, \ldots,$$

durch

$$A_{\alpha,\beta,\ldots}, \quad \xi, \eta, \ldots, \quad \xi_0, \eta_0, \ldots,$$

so lässt sich, der Voraussetzung nach, eine (positive) Grösse G angeben, die grösser ist als

$$A_{\alpha,\beta,\ldots}\xi_0^{\alpha}\eta_0^{\beta}\ldots,$$

welche Werthe auch $\alpha, \beta, \ldots$ haben mögen. Alsdann ist der absolute Betrag von $a_{\alpha,\beta,\ldots}$ kleiner als $G\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots$, also der absolute Betrag von $a_{\alpha,\beta,\ldots}x^{\alpha}y^{\beta}\ldots$ kleiner als $G\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots\xi^{\alpha}\eta^{\beta}\ldots$, und daher die Summe von beliebig vielen Gliedern der betrachteten Reihe dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\Sigma G\xi_0^{-\alpha}\eta_0^{-\beta}\ldots\xi^{\alpha}\eta^{\beta}\ldots = \frac{G}{\left(1-\frac{\xi}{\xi_0}\right)\left(1-\frac{\eta}{\eta_0}\right)\ldots},$$

wofern $\xi < \xi_0$, $\eta < \eta_0$, ..., wodurch der aufgestellte Satz erwiesen ist.

2) Es seien die Glieder einer unendlichen Reihe

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots\ldots$$

Functionen beliebig vieler Veränderlichen $x, y, \ldots$, die sich nach ganzen positiven Potenzen von $x, y, \ldots$ in Reihen entwickeln lassen. Ferner sollen $\psi, \psi', \psi'', \ldots\ldots$ diejenigen Reihen bezeichnen, in welche die Reihen-Ausdrücke von $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots\ldots$ dadurch übergehen, dass jeder Coefficient derselben durch seinen absoluten Betrag ersetzt wird.

*) Eine Reihe soll unbedingt convergent genannt werden, wenn sie bei jeder beliebigen Anordnung ihrer Glieder convergirt. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass die Reihe der absoluten Beträge ihrer Glieder eine endliche Summe habe.

Wenn nun für bestimmte positive Werthe $\xi_0, \eta_0, \ldots$ von $x, y, \ldots$ jede einzelne der Reihen $\psi, \psi', \psi'', \ldots$ und ebenso ihre Summe

$$\psi + \psi' + \psi'' + \cdots$$

convergirt, so convergirt auch die Summe

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots,$$

für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die ihrem absoluten Betrage nach nicht grösser als beziehlich $\xi_0, \eta_0, \ldots$ sind. Bezeichnet man in den Reihen-Ausdrücken von $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ die Coefficienten von $x^\alpha y^\beta \ldots$ beziehlich durch $a_{\alpha,\beta,\ldots}, a'_{\alpha,\beta,\ldots}, a''_{\alpha,\beta,\ldots}, \ldots$ und setzt

$$a_{\alpha,\beta,\ldots} + a'_{\alpha,\beta,\ldots} + a''_{\alpha,\beta,\ldots} + \cdots = A_{\alpha,\beta,\ldots},$$

so hat jede der Grössen $A_{\alpha,\beta,\ldots}$ einen endlichen Werth, und es ist für die genannten Werthe von $x, y, \ldots$ die Reihe

$$\Sigma A_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots$$

nicht nur convergent, sondern auch gleich der Summe

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' + \cdots$$

Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus dem vorhergehenden und aus dem Begriffe einer unbedingt convergenten Reihe.

3) Wenn von den beiden Reihen

$$\varphi = \Sigma a_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots$$
$$\varphi_1 = \Sigma b_{\alpha,\beta,\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots$$

jede für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $\xi_0, \eta_0, \ldots$ sind, convergirt, so ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze, dass auch die Reihen

$$\Sigma(a_{\alpha,\beta,\ldots} \pm b_{\alpha,\beta,\ldots}) x^\alpha y^\beta \ldots$$
$$\Sigma(a_{\alpha',\beta',\ldots} b_{\alpha'',\beta'',\ldots} x^\alpha y^\beta \ldots) \qquad (\alpha' + \alpha'' = \alpha,\ \beta' + \beta'' = \beta, \ldots)$$

für dieselben Werthe von $x, y, \ldots$ convergent sind, und beziehlich die Summe, die Differenz und das Product von φ und φ_1 darstellen.

Daraus ergiebt sich, als weitere Folgerung:

4) Wenn $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ beliebig viele Functionen von $x, y, \ldots$ sind, die sich nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen in Reihen entwickeln lassen, und F ist eine ganze rationale Function von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$, so ist die Reihe, welche aus F durch Substitution jener Reihen für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ und durch formelle Entwickelung nach Potenzen von $x, y, \ldots$ hervorgeht, stets unbedingt convergent und ihre Summe gleich F für alle diejenigen Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Entwickelungen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ sämmtlich unbedingt convergiren.

5) Ist aber F eine Function von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$, die sich in eine unendliche Reihe

$$\sum C_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots\ldots} \varphi^{\alpha} \varphi_1^{\beta} \varphi_2^{\gamma} \ldots\ldots$$

entwickeln lässt, und man setzt statt $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ ihre Reihen-Ausdrücke, so gelten hinsichtlich der Convergenz der Reihe, die man aus der vorstehenden durch Entwickelung derselben nach Potenzen von $x, y, \ldots$ erhält, folgende Bestimmungen.

A) Es convergire die ursprüngliche Reihe für F, sobald $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner sind als beziehlich $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots\ldots$, und es seien $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots\ldots$ die Reihen, in welche $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ übergehen, wenn man jeden Coefficienten der letzteren durch seinen absoluten Betrag ersetzt; ferner sei $f(x, y, \ldots)$ die Reihe, in welche F durch die angegebene Substitution übergeht, und $\xi, \eta, \ldots$ seien wieder die absoluten Beträge von $x, y, \ldots$; alsdann convergirt $f(x, y, \ldots)$ und es besteht die Gleichung

$$F(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots) = f(x, y, \ldots)$$

jedenfalls für alle Werthe von $x, y, \ldots$, die den Bedingungen

$$\psi(\xi, \eta, \ldots) < \rho, \qquad \psi_1(\xi, \eta, \ldots) < \rho_1, \qquad \psi_2(\xi, \eta, \ldots) < \rho_2, \qquad \ldots\ldots$$

Genüge leisten. Wenn daher $\varphi(0, 0, \ldots)$, $\varphi_1(0, 0, \ldots)$, $\varphi_2(0, 0, \ldots)$, $\ldots\ldots$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots\ldots$ sind, so wird die Reihe $f(x, y, \ldots)$ wenigstens für alle Werthe von $x, y, \ldots$, deren absolute Beträge gewisse Grenzen nicht überschreiten, convergiren.

B) Convergirt die Reihe, in welche F nach Potenzen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ entwickelt werden kann, für alle Werthe dieser Grössen, so convergirt die Reihe $f(x, y, \ldots)$ und es besteht die Gleichung

$$f(x, y, \ldots) = F(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots)$$

für alle diejenigen Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Reihen-Entwickelungen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ sämmtlich unbedingt convergiren.

Anm. Es ist wohl zu bemerken, dass die vorstehenden Sätze 2) bis 5) nicht unbedingt umgekehrt werden dürfen; man darf also z. B. nicht behaupten, in dem zuletzt betrachteten Falle convergire $f(x, y, \ldots)$ nur für solche Werthe von $x, y, \ldots$, für welche die Entwickelungen von $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots$ sämmtlich convergiren. Die Sätze geben daher, obgleich sie sich bei vielen Untersuchungen nützlich erweisen, keineswegs die wahren Kriterien, nach welchen über die Convergenz von Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen einer oder mehrerer Veränderlichen fortschreiten, entschieden werden kann. Diese Kriterien müssen vielmehr aus einer andern Quelle abgeleitet werden; wie ich dies bei einer andern Gelegenheit zu zeigen gedenke.

Ich betrachte jetzt, um den ersten der oben angegebenen Sätze zu beweisen, die Function $Fc(u)$, und beschränke die Veränderlichkeit von u zunächst auf solche Werthe, deren absoluter Betrag kleiner als eine oberhalb 1 beliebig angenommene ganze positive Zahl m ist.

Man hat

$$Fc(u) = u \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=m-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right) \right\} \prod_{\alpha=m}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right) \right\}.$$

Setzt man nun

$$\prod_{\alpha=m}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha}\right) \right\} = \prod_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha+m}{\alpha+m+1}\right)^u \left(1+\frac{u}{\alpha+m}\right) \right\} = \varphi(u, m),$$

so ist

$$\log \varphi(u, m) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \left\{ -u \log\left(1+\frac{1}{\alpha+m}\right) + \log\left(1+\frac{u}{\alpha+m}\right) \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} \left\{ \sum_{\mathfrak{a}=2}^{\mathfrak{a}=+\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}(u^{\mathfrak{a}}-u)}{\mathfrak{a}(\alpha+m)^{\mathfrak{a}}} \right\}.$$

Es sei ferner

$$\sum_{\mathfrak{a}=2}^{\mathfrak{a}=+\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}(u^{\mathfrak{a}}-u)}{\mathfrak{a}(m+\alpha)^{\mathfrak{a}}} = \varphi_\alpha(u)$$

und

$$\sum_{\alpha=2}^{\alpha=+\infty} \frac{(u^\alpha+u)}{\alpha(m+\alpha)^\alpha} = \psi_\alpha(u),$$

so dass $\psi_\alpha(u)$ aus der Reihe $\varphi_\alpha(u)$ dadurch hervorgeht, dass man in dieser jeden Coefficienten durch seinen absoluten Betrag oder eine grössere positive Zahl ersetzt. Dann wird sich nach dem zweiten der vorstehenden Sätze

$$\log\varphi(u,m) = \varphi_0(u)+\varphi_1(u)+\cdots+\varphi_n(u)+\cdots$$

nach Potenzen von u in eine convergirende Reihe entwickeln lassen, wenn die Summe

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\psi_\alpha(u) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\sum_{\alpha=2}^{\alpha=+\infty}\frac{u^\alpha+u}{\alpha(m+\alpha)^\alpha}$$

für jeden positiven Werth von u, der kleiner als m ist, einen endlichen Werth hat. Dies ist in der That der Fall.

Es ist nämlich

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^\alpha} = \frac{1}{m^\alpha}\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^\alpha},$$

und wenn man in der letzteren Summe das $(n+1)^{te}$ Glied durch t_n bezeichnet:

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{n-1}{m}\right)^\alpha}{\left(1+\frac{n}{m}\right)^\alpha} = \frac{\left(1+\frac{m-1}{n}\right)^\alpha}{\left(1+\frac{m}{n}\right)^\alpha} = 1-\frac{\alpha}{n}+\cdots,$$

also wenn

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^\alpha} = s_\alpha$$

gesetzt wird, für $\alpha > 1$ nach § 5 (VII, 2) s_α eine endliche Grösse, die abnimmt, wenn α wächst; woraus, da

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\psi_\alpha(u) = \sum_{\alpha=2}^{\alpha=+\infty}\frac{(u^\alpha+u)\,s_\alpha}{\alpha m^\alpha}$$

ist, das Behauptete unmittelbar folgt.

Nach dem fünften der obigen Sätze (Art. B) lässt sich nun von den beiden Factoren, in die $Fc(u)$ zerlegt ist, der zweite, welcher gleich

$$e^{\log\varphi(u,m)}$$

ist, nach ganzen positiven Potenzen von u in eine Reihe entwickeln, die sicher für jeden der betrachteten Werthe von u convergirt; der erste Factor aber ist durch eine beständig convergirende Reihe von derselben Form darstellbar. Es ergiebt sich also, nach dem dritten der angeführten Sätze, für $Fc(u)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitende Reihe, welche jedenfalls convergirt, wenn der absolute Betrag von u kleiner als m ist. Die Coefficienten dieser Reihe sind aber von m unabhängig; da man nun diese Zahl beliebig gross annehmen kann, so muss die in Rede stehende Reihe für jeden endlichen Werth von u convergiren; w. z. b. w.

Was den zweiten der obigen Sätze angeht, so bemerke ich zunächst Folgendes.

Wenn y eine positive ganze Zahl ist, so kann die Facultät $(u, +x)^y$ in eine endliche Reihe von der Form

$$u^y\left\{1+(y)_1\frac{x}{u}+(y)_2\frac{x^2}{u^2}+\cdots\right\}$$

entwickelt werden, wo sich die Coefficienten $(y)_1, (y)_2, \ldots$ als ganze Functionen von y darstellen lassen. Nimmt man für y eine beliebige Grösse an, so verwandelt sich die vorstehende Formel in eine unendliche Reihe. Ist y eine negative ganze Zahl, so lässt sich leicht zeigen, dass diese Reihe für alle Werthe von u, x, bei denen der absolute Betrag von $\frac{x}{u}$ unter einer bestimmten, von y abhängigen Grenze liegt, convergirt und ebenfalls gleich $(u, +x)^y$ ist. Man hat nun angenommen, dies müsse auch für nicht ganzzahlige Werthe von y der Fall sein, und es hat namentlich Öttinger in der oben (S. 157) angeführten Abhandlung bei seinen Deductionen die in Rede stehende Reihe vielfach benutzt. Aus den nachstehenden Betrachtungen erhellt indessen, dass die Reihe, wofern y keine ganze Zahl ist, niemals convergirt, welche Werthe man auch den Grössen u, x beilegen möge.

Wenn eine Reihe von der Form

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} a_\alpha x^\alpha,$$

wo α eine veränderliche ganze Zahl bedeutet, für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag zwischen zwei Grenzen a und b liegt, convergirt, so giebt es, wofern man x auf irgend einen, ganz innerhalb des Convergenzgebietes

der Reihe liegenden Bereich beschränkt, in demselben stets nur eine endliche Anzahl von Werthen, für welche die Reihe den Werth Null annimmt. Der strenge Beweis dieses Satzes, von dem man bei manchen Untersuchungen Gebrauch machen kann, lässt sich aus den oben aufgestellten Convergenz-Sätzen ableiten; was ich jedoch hier der Kürze wegen übergehe.

Dies vorausgesetzt, werde in der obigen Reihe (was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen kann) $x = 1$ gesetzt, für y irgend ein bestimmter Werth angenommen, und unter u zunächst eine positive reelle Grösse verstanden. Angenommen nun, die Reihe convergire für irgend einen bestimmten Werth u_0 von u, so wird dies auch für jeden grösseren Werth der Fall sein, und es ist unter der Bedingung, dass u zwischen den Grenzen u_0 und $+\infty$ angenommen und bei der Bestimmung der Potenz u^y dem Logarithmus von u sein reeller Werth beigelegt werde,

$$\varphi(u) = u^y\{1 + (y)_1 u^{-1} + (y)_2 u^{-2} + \cdots\}$$

eine eindeutige und continuirliche Function der Grösse u.

Wenn y eine ganze positive Zahl ist, so hat man

$$\varphi(u+1) = \frac{u+y}{u}\varphi(u),$$

also

$$(u+y)\{u^y + (y)_1 u^{y-1} + (y)_2 u^{y-2} + \cdots\} = u\{(u+1)^y + (y)_1 (u+1)^{y-1} + \cdots\}.$$

Entwickelt man, y als eine unbestimmte Grösse betrachtend, beide Seiten dieser Gleichung in Reihen, die nach fallenden Potenzen von u fortschreiten, so müssen die Coefficienten der einen Reihe den gleichstelligen der anderen Reihe für alle positiven ganzzahligen Werthe von y gleich sein; woraus folgt, dass sie identisch einander gleich sein werden, weil sie nämlich sämmtlich ganze rationale Functionen von y sind. (In der That gelangt man, wenn man die angedeutete Rechnung ausführt, zu den bekannten Ausdrücken von $(y)_1, (y)_2, \ldots$.) Mithin muss die in der vorstehenden Gleichung ausgesprochene Relation

$$\varphi(u+1) = \frac{u+y}{u}\varphi(u)$$

gelten, sobald nur die genannten Reihen beide convergiren; was bei den obigen Annahmen sicher der Fall ist, wenn u nicht nur $> u_0$, sondern auch > 1 ist.

Aus dieser Relation ergiebt sich, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\varphi(u) = \frac{u(u+1)\dots(u+n-1)}{(u+y)(u+y+1)\dots(u+y+n-1)}\varphi(u+n)$$

oder, wenn $F(u,n)$ dieselbe Bedeutung hat wie im Anfange des § 6,

$$\varphi(u) = \frac{F(u,n)}{F(u+y,n)}\frac{\varphi(u+n)}{n^y}.$$

Es ist aber

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{\varphi(u+n)}{n^y} = 1,$$

und daher (§ 6, Gleichung 46)

$$\varphi(u) = \frac{Fc(u)}{Fc(u+y)},$$

wenigstens für jeden Werth von u, der $> u_0$ und zugleich > 1 ist.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man

$$\varphi_1(u) = 1 + (y)_1 u^{-1} + (y)_2 u^{-2} + \cdots$$

setzt,

$$\frac{1}{Fc(u)}\frac{dFc(u)}{du} - \frac{1}{Fc(u+y)}\frac{dFc(u+y)}{du} = \frac{y}{u} + \frac{1}{\varphi_1(u)}\frac{d\varphi_1(u)}{du},$$

$$\varphi_1(u)\left(Fc(u+y)\frac{dFc(u)}{du} - Fc(u)\frac{dFc(u+y)}{du}\right) - Fc(u)\,Fc(u+y)\left(\frac{y}{u}\varphi_1(u) + \frac{d\varphi_1(u)}{du}\right) = 0.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Gleichung lässt sich nun in eine nach ganzen (positiven und negativen) Potenzen von u fortschreitende Reihe entwickeln, welche jedenfalls convergirt, wenn der absolute Betrag von u grösser als u_0 ist; die Coefficienten dieser Reihe müssen aber, da die Gleichung für jeden zwischen bestimmten Grenzen liegenden reellen Werth von u gilt, nach dem oben angeführten Hülfssatze sämmtlich gleich Null sein.

Daraus folgt, dass die vorstehende Gleichung für jeden (reellen oder complexen) Werth von u, dessen absoluter Betrag grösser als u_0 ist, besteht. Dies ist aber nur möglich, wenn y eine ganze Zahl ist. Nimmt man nämlich eine ganze positive Zahl n, die $> u_0$ ist, so an, dass $\varphi_1(-n)$ einen von Null verschiedenen Werth erhält, und setzt $u = -n$, so reducirt sich die linke Seite der Gleichung auf

$$\varphi_1(-n)\,Fc(-n+y)\left(\frac{dFc(u)}{du}\right)_{u=-n},$$

und dies Product hat stets einen von Null verschiedenen Werth, wenn y keine ganze Zahl ist.

Hiernach ist die Annahme, dass die Reihe

$$u^y\{1+(y)_1u^{-1}+(y)_2u^{-2}+\cdots\},$$

wenn der Grösse y ein nicht ganzzahliger Werth beigelegt wird, für irgend einen endlichen Werth von u convergire, unstatthaft.

Damit soll jedoch keineswegs behauptet werden, dass die Differenz zwischen $(u,+1)^y$ und der Summe mehrerer der ersten Glieder der vorstehenden Reihe, wenn u ohne Ende wächst, nicht kleiner werden könne, als jede gegebene Grösse. Indessen leuchtet ein, dass sich aus der in Rede stehenden Reihe hinsichtlich der Facultät $(u,+x)^y$, namentlich was das Verhalten derselben betrifft, wenn der Quotient $\frac{x}{u}$ unendlich klein wird, ohne Betrachtung des Ergänzungsgliedes, welches der Reihe hinzuzufügen ist, sobald man sie mit irgend einem Gliede abbricht, durchaus keine sicheren Schlüsse ziehen lassen. Ein brauchbarer Ausdruck für dieses Ergänzungsglied dürfte sich aber nur mit Schwierigkeit ermitteln lassen.

8.

Ich gehe jetzt zu den Entwickelungen von

$$(u+k,+x)^y \text{ und } (u+k,-x)^y,$$

sowie von

$$\log(u,+x)^y \text{ und } \log(u,-x)^y$$

über, welche in dem erwähnten Crelle'schen »Mémoire« aus der daselbst als allgemeine Taylor'sche Reihe aufgestellten Entwickelungsformel hergeleitet worden sind. In der Gestalt, wie diese Entwickelungen dort gegeben sind, ist ihre Richtigkeit ausser Frage, indem sie identische Umgestaltungen der darzustellenden Functionen sind, und dem allgemeinen n^{ten} Gliede jedesmal der ergänzende Rest beigefügt ist. Anwendbar sind sie jedoch nur, insofern sich dieses Ergänzungsglied der Grenze Null nähert, wenn n ohne Ende zunimmt. Ob dies der Fall sei, lässt sich in den meisten Fällen aus der Betrachtung des Ergänzungsgliedes selbst nur schwer erkennen (es dürfte vielleicht möglich sein, den in Rede stehenden Rest durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, welches eine leichtere Beurtheilung seines Betrages zu-

liesse), indem der am angeführten Orte zu diesem Zwecke aufgestellte Satz, wie es von dem Verfasser selbst in einer späteren Abhandlung über denselben Gegenstand bemerkt worden ist, nur dann gilt, wenn die Reihe mit irgend einem Gliede abbricht. Aus dem blossen Umstande aber, dass die Summe der n ersten Glieder, wenn n ohne Ende wächst, sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert, lässt sich bei einer Reihe von dieser Form nicht schliessen, dass sie der zu entwickelnden Grösse gleich sei. Denn gesetzt, es bestehe für eine bestimmte Function $F(x)$ und für alle einem gewissen continuirlichen Bereiche angehörigen Werthe von x und $x+k$ wirklich die Gleichung

$$F(x+k) = F(x) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \left\{ \frac{(k,-\alpha)^\nu}{(1,+1)^\nu} \frac{\Delta^\nu F(x)}{\alpha^\nu} \right\},$$

wo α eine Constante bedeutet und $\Delta x = \alpha$ zu nehmen ist; so sei $\psi(x)$ eine der Bedingung

$$\psi(x+\alpha) = \psi(x)$$

genügende Function und

$$F_1(x) = \psi(x) F(x).$$

Dann convergirt, indem

$$\Delta^\nu F_1(x) = \psi(x) \Delta^\nu F(x)$$

ist, für die genannten Werthe von x und $x+k$ auch die Reihe

$$F_1(x) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \left\{ \frac{(k,-\alpha)^\nu}{(1,+1)^\nu} \frac{\Delta^\nu F_1(x)}{\alpha^\nu} \right\};$$

dieselbe ist aber gleich $\psi(x) F(x+k)$, also nur dann gleich $F_1(x+k)$, wenn

$$\psi(x+k) = \psi(x)$$

ist, was bei einem bestimmten Werthe von x nicht für alle einem continuirlichen Bereiche angehörigen Werthe von k stattfinden kann.

Wenngleich hiernach die Benutzung der in Rede stehenden Entwickelungsformel in den meisten Fällen nicht ohne Schwierigkeit ist, so bleibt sie doch jedenfalls ein treffliches Mittel, um für manche Functionen auf einem natürlichen und directen Wege Reihen-Ausdrücke zu erlangen, von denen man, nachdem sie gefunden worden sind, in vielen Fällen ohne Schwierigkeit nachweisen kann, dass sie die zu entwickelnden Grössen wirklich darstellen.

Für die Function $(u, +x)^y$ hat man, wenn man das Zeichen Δ auf u bezieht und $\Delta u = x$ setzt:

$$\Delta(u, +x)^y = yx\frac{(u, +x)^y}{u}.$$

Aber es ist

$$(u+x, +x)^{y-1} = (u+x, +x)^{-1}(u, +x)^y = \frac{(u, +x)^y}{u},$$

also

(85.) $$\Delta(u, +x)^y = yx(u+x, +x)^{y-1}.$$

Durch mehrmalige Wiederholung derselben Operation folgt hieraus:

(86.) $$\Delta^n(u, +x)^y = x^n(y, -1)^n(u+nx, +x)^{y-n}.$$

Aber es ist

$$(u+nx, +x)^{y-n} = (u+nx, +x)^{-n}(u, +x)^y = \frac{(u, +x)^y}{(u, +x)^n},$$

also

(87.) $$\Delta^n(u, +x)^y = x^n(y, -1)^n\frac{(u, +x)^y}{(u, +x)^n}.$$

Für die Function $(u, -x)^y$ erhält man, wenn man in der ersten Formel (70.)

$$\frac{(u-x, -x)^y - (u, -x)^y}{(u, -x)^y} = -\frac{yx}{u}$$

$u+x$ statt u setzt und $\Delta u = x$ nimmt,

$$\Delta(u, -x)^y = \frac{yx}{u+x}(u+x, -x)^y = yx(u, -x)^{y-1},$$

woraus weiter

(88.) $$\begin{aligned}\Delta^n(u, -x)^y &= x^n(y, -1)^n(u, -x)^{y-n} \\ &= x^n(y, -1)^n\frac{(u, -x)^y}{(u-yx+x, +x)^n}\end{aligned}$$

folgt.

Die angeführte Entwickelungsformel giebt nun

(89.) $$(u+k, +x)^y = (u, +x)^y\left\{1 + \frac{yk}{u} + \frac{y(y-1)}{1.2}\frac{k(k-x)}{u(u+x)} + \cdots + \frac{(y, -1)^n}{(1, +1)^n}\frac{(k, -x)^n}{(u, +x)^n}\right\} + R_n,$$

wo R_n das Ergänzungsglied bezeichnet, auf dessen Ausdruck es hier nicht weiter ankommt. Wenn y eine positive ganze Zahl ist, so bricht die Reihe mit dem $(y+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab und giebt den vollständigen Ausdruck für

$(u+k, +x)^y$. In jedem andern Falle aber ist die Zahl ihrer Glieder unendlich, und es ist zu untersuchen:

erstens, unter welchen Bedingungen die Reihe dann eine endliche Summe habe; und

zweitens, ob diese Summe wirklich gleich $(u+k, +x)^y$ sei.

Es werde (für $n = 0, 1, \cdots +\infty$)

$$\frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}\,\frac{(k,-x)^n}{(u,+x)^n} = t_n$$

gesetzt; dann ist

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{y-n+1}{n}\,\frac{k-nx+x}{u+nx-x} = \left(1-\frac{y+1}{n}\right)\left(1-\frac{k+x}{nx}\right)\left(1+\frac{u-x}{nx}\right)^{-1}$$

$$= 1-\frac{y+\dfrac{u+k}{x}+1}{n}+\cdots$$

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} t_\nu$ hat daher nach dem Satze (§ 5, VII, 2) eine endliche Summe, sobald der reelle Theil von

$$\frac{u+k}{x}+y$$

positiv ist.

Nun ist, wenn $x = 1$ gesetzt wird,

$$\frac{(u+k, +1)^y}{(u, +1)^y} = \frac{(u, +1)^{y+k}}{(u, +1)^y (u, +1)^k}.$$

Bezeichnet man diesen Ausdruck durch $\varphi(u)$, so ergiebt sich nach Gleichung (57.)

$$\varphi(u+1) = \frac{(u+y+k)\,u}{(u+y)\,(u+k)}\,\varphi(u)$$

und nach Gleichung (58.)

$$\operatorname*{Lim}_{n=+\infty} \varphi(u+n) = 1.$$

Setzt man daher

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{(y,-1)^\nu (k,-1)^\nu}{(1,+1)^\nu (u,+1)^\nu}\right\} = \varphi_1(u),$$

so ist zu untersuchen, ob bei bestimmten Werthen von y, k für alle diejenigen Werthe von u, für welche die Reihe convergirt, ebenfalls die Re-

lation

$$\varphi_1(u+1) = \frac{(u+y+k)u}{(u+y)(u+k)}\varphi_1(u)$$

sich ergebe. Ist dies der Fall, so hat man

$$\frac{\varphi_1(u+1)}{\varphi(u+1)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)};$$

woraus weiter, für jeden ganzzahligen Werth von n,

$$\frac{\varphi_1(u+n)}{\varphi(u+n)} = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}$$

folgt. Daraus folgt, da auch $\underset{n=+\infty}{\mathrm{Lim}}\,\varphi_1(u+n) = 1$ ist,

$$\varphi_1(u) = \varphi(u),$$

d. h. es besteht die Gleichung

$$(90.)\quad \frac{(u,+1)^{y+k}}{(u,+1)^y(u,+1)^k} = 1+\frac{yk}{u}+\frac{y(y-1)}{1.2}\frac{k(k-1)}{u(u+1)}+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\frac{k(k-1)(k-2)}{u(u+1)(u+2)}+\cdots$$

für alle diejenigen Werthe von u, y, k, bei denen $u+y+k$ eine positive, oder auch eine complexe Grösse mit positivem reellen Theile ist. Wird dann $\frac{u}{x}$ statt u und $\frac{k}{x}$ statt k gesetzt, so ergiebt sich die Richtigkeit der Gleichung

$$(91.)\quad (u+k,+x)^y = (u,+x)^y\left\{1+\frac{yk}{u}+\frac{y(y-1)}{1.2}\frac{k(k-x)}{u(u+x)}+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\frac{k(k-x)(k-2x)}{u(u+x)(u+2x)}+\cdots\right\}$$

für die angegebenen Werthe von u, x, y, k, bei denen die Reihe convergirt.

Die fragliche Relation für $\varphi_1(u)$ lässt sich aber folgendermassen erweisen.

Es ist, wenn man in dem obigen Ausdrucke für t_n der Grösse x den Werth 1 beilegt,

$$\varphi_1(u) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} t_\nu,$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\varphi_1(u+1) = u\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\frac{t_\nu}{u+\nu},$$

indem sich t_ν in $\frac{u}{u+\nu}t_\nu$ verwandelt, wenn $u+1$ statt u gesetzt wird. Nun

ist aber

$$t_{\nu+1} = \frac{(y-\nu)(k-\nu)}{(\nu+1)(u+\nu)} t_\nu,$$

$$\frac{t_\nu}{u+\nu} = \frac{\nu+1}{(y-\nu)(k-\nu)} t_{\nu+1},$$

also

$$\varphi_1(u+1) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(\nu+1)ut_{\nu+1}}{(y-\nu)(k-\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \frac{\nu u t_\nu}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{\nu u t_\nu}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)},$$

indem in der letzten Reihe das Glied, in welchem $\nu = 0$ ist, sich auf Null reducirt. Es ist aber

$$\frac{\nu u}{(y-\nu+1)(k-\nu+1)} = \frac{u(y+1)}{(k-y)(y-\nu+1)} + \frac{u(k+1)}{(y-k)(k-\nu+1)},$$

und daher

$$\varphi_1(u+1) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{u(y+1)t_\nu}{(k-y)(y-\nu+1)} + \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{u(k+1)t_\nu}{(y-k)(k-\nu+1)}.$$

Ferner ist

$$(y-\nu)t_\nu = \frac{(\nu+1)(u+\nu)}{k-\nu} t_{\nu+1},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} (y-\nu)t_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(\nu+1)(u+\nu)t_{\nu+1}}{k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{\nu(u+\nu-1)t_\nu}{k-\nu+1},$$

mithin

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \left(y-\nu-\frac{\nu(u+\nu-1)}{k-\nu+1}\right) t_\nu = 0.$$

Aber es ist

$$y-\nu-\frac{\nu(u+\nu-1)}{k-\nu+1} = (u+y+k) - \frac{(k+1)(u+k)}{k-\nu+1},$$

mithin

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} (u+y+k)t_\nu - \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(k+1)(u+k)}{k-\nu+1} t_\nu = 0,$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(k+1)t_\nu}{k-\nu+1} = \frac{u+y+k}{u+k} \varphi_1(u).$$

Vertauscht man in dieser Gleichung k und y mit einander, so erhält man weiter:

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(y+1)t_\nu}{y-\nu+1} = \frac{u+y+k}{u+y} \varphi_1(u),$$

und durch Verbindung beider Gleichungen, indem

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(k+1)t_\nu}{k-\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{(y+1)t_\nu}{y-\nu+1} = \frac{y-k}{u}\varphi_1(u+1)$$

ist, die zu beweisende Relation

$$\varphi_1(u+1) = \frac{u(u+y+k)}{(u+y)(u+k)}\varphi_1(u).$$

Die Formel (90.), eine der wichtigsten in der Facultäten-Lehre, findet sich in der oben (Seite 189) erwähnten Abhandlung von Gauss, wenn auch in etwas anderer Form; ich habe sie hier hergeleitet, ohne die allgemeinen Relationen, aus denen sie dort hervorgeht, vorauszusetzen.

Die Reihe für $(u+k,-x)^y$ lässt sich auf ganz ähnliche Weise finden, noch leichter aber aus der vorhergehenden herleiten, indem nach der ersten Formel (82.)

$$(u+k,-x)^y = (u+k-(y-1)x,+x)^y$$

ist, und daher in (91.) nur $(u,+x)^y$ in $(u-(y-1)x,+x)^y = (u,-x)^y$ zu verwandeln und in der eingeklammerten Reihe $u-(y-1)x$ statt u zu setzen ist. Da nun aber, nach (74.) und (82.),

$$\frac{(u,-x)^y}{(u-(y-1)x,+x)^n} = \frac{(u,-x)^y}{(u-yx+nx,-x)^n} = (u,-x)^{y-n}$$

ist, so ergiebt sich

$$(92.)\quad (u+k,-x)^y = (u,-x)^y + y(u,-x)^{y-1}k + \frac{y(y-1)}{1.2}(u,-x)^{y-2}k(k-x) + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}(u,-x)^{y-3}k(k-x)(k-2x)+\cdots$$

Dem Obigen zufolge gilt diese Reihe für alle Werthe von u, x, y, k, bei denen der reelle Theil von $\frac{u-(y-1)x+k}{x}+y = \frac{u+k}{x}+1$ positiv ist.

Dagegen ist die von Kramp u. A. aufgestellte Gleichung

$$(u+k,+1)^y = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{(y,-1)^\nu}{(1,+1)^\nu}(u,+1)^{y-\nu}(k,+1)^\nu\right\},$$

zu welcher man gelangt, wenn man $(u+k,+1)^y$ auf ähnliche Weise, wie im Vorhergehenden entwickelt, aber $\Delta u = -1$ setzt, im Allgemeinen unrichtig.

Weil nämlich

$$(u,+1)^{y-\nu}(k,+1)^{\nu} = \frac{(u,+1)^{y}(k,+1)^{\nu}}{(u+y-\nu,+1)^{\nu}}$$
$$= \frac{(u,+1)^{y}(k,+1)^{\nu}}{(u+y-1,-1)^{\nu}} = \frac{(u,+1)^{y}(-k,-1)^{\nu}}{(1-u-y,+1)^{\nu}}$$

ist, so hat in Folge der Gleichung (91.), wenn in dieser $1-u-y$ statt u, ferner $-k$ statt k und $x=1$ gesetzt wird, sobald der reelle Theil von $1-u-k$ positiv ist, die Reihe auf der Rechten der vorstehenden Gleichung den Werth

$$\frac{(u,+1)^{y}(1-u-y-k,+1)^{y}}{(1-u-y,+1)^{y}} = \frac{(u,+1)^{y}}{(-u,-1)^{y}}(-u-k,-1)^{y}.$$

Es ist aber*)

$$\frac{(u,+1)^{y}}{(-u,-1)^{y}} = \frac{Fc(u)\,Fc(1-u)}{Fc(u+y)\,Fc(1-u-y)} = \frac{\sin(u\pi)}{\sin(u+y)\pi},$$

und es ergiebt sich demnach an Stelle der obigen Gleichung die folgende:

$$(93.)\quad \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{(y,-1)^{\nu}}{(1,+1)^{\nu}}(u,+1)^{y-\nu}(k,+1)^{\nu}\right\} = \frac{\sin(u\pi)}{\sin(u+y)\pi}\,\frac{\sin(u+k+y)\pi}{\sin(u+k)\pi}(u+k,+1)^{y};$$

wie dies bereits Ohm**) bemerkt hat.

Man hat hier ein treffendes Beispiel zu dem oben Gesagten, dass man beim Gebrauch der Formel

$$F(u+k) = F(u)+\frac{\Delta F(u)}{\Delta u}k+\frac{\Delta^{2}F(u)}{\Delta u^{2}}\,\frac{k(k-\Delta u)}{2}+\cdots+\frac{\Delta^{n}F(u)}{\Delta u^{n}}\,\frac{(k,-\Delta u)^{n}}{(1,+1)^{n}}+R_{n}$$

nicht schliessen dürfe, es sei $R_n = 0$ für $n=\infty$, sobald die Summe der n ersten Glieder bei stets wachsendem Werthe von n sich einer bestimmten Grenze nähert.

Aus (91.) folgt

$$\frac{1}{k}\left(\frac{(u+k,+x)^{y}}{(u,+x)^{y}}-1\right) = \frac{y}{u}+\frac{y(y-1)}{1.2}\,\frac{k-x}{u(u+x)}+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\,\frac{(k-x)(k-2x)}{u(u+x)(u+2x)}+\cdots.$$

Nimmt man nun an, es sei der relle Theil $\frac{u}{x}+y$ positiv, und lässt k unend-

*) S. d. folg. §.

**) System der Mathematik, Thl. 2, S. 89.

lich klein werden, so ergiebt sich

$$(94.)\quad \frac{\partial \log (u,+x)^y}{\partial u} = \frac{y}{u} - \frac{y(y-1)}{1.2}\frac{x}{u(u+x)} + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\frac{2x^2}{u(u+x)(u+2x)} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}\frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}\frac{(1,+1)^{n-1}}{(u,+x)^n}x^{n-1} + \cdots$$
$$= \frac{y}{u} - \frac{y(y-1)}{2}\frac{x}{u(u+x)} + \frac{y(y-1)(y-2)}{3}\frac{x^2}{u(u+x)(u+2x)} + \cdots.$$

Nun folgt aber aus der Formel (87.), wenn man in derselben $n-1$ statt n und $u+x$ statt u setzt:

$$(95.)\quad \Delta^{n-1}(u+x,+x)^y = (y,-1)^{n-1}\frac{(u+x,+x)^y x^{n-1}}{(u+x,+x)^{n-1}}, \qquad \text{für } \Delta u = x,$$

und hieraus, wenn man $y=-1$ setzt:

$$(96.)\quad \Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) = (-1)^{n-1}\frac{(1,+1)^{n-1}x^{n-1}}{(u,+x)^n}, \qquad \text{für } \Delta u = x;$$

folglich ist

$$(97.)\quad \frac{\partial \log (u,+x)^y}{\partial u} = \frac{y}{u} + \frac{y(y-1)}{1.2}\Delta\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta^2\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}\Delta^{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) + \cdots.$$

Legt man nun, bei gegebenen Werthen von x, y, der Grösse u nur solche Werthe bei, für welche nicht nur der reelle Theil von $\frac{u}{x}+y$, sondern auch der reelle Theil von $\frac{u}{x}$ positiv ist, so sind die Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung stetige Functionen von u, und man erhält durch Integration:

$$(98.)\quad \log (u,+x)^y = y\log u + \frac{y(y-1)}{1.2}\Delta\log u + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta^2\log u + \cdots$$
$$+ \frac{(y,-1)^n}{(1,+1)^n}\Delta^{n-1}\log u + \cdots,$$

in welcher Gleichung die Werthe der darin vorkommenden Logarithmen folgendermassen zu fixiren sind. Man bestimme den Werth von $\log x$ so, dass $e^{y\log x}$ gleich der in dem Ausdrucke (60.) von $(u,+x)^y$ vorkommenden Potenz x^y ist. Ferner setze man, wenn w eine Grösse ist, für welche der

reelle Theil von $\frac{w}{x}$ einen positiven Werth hat,

$$\log w = \log x + \log\left(\frac{w}{x}\right)$$

und lege dem Logarithmus von $\frac{w}{x}$ dessen Hauptwerth*) bei. Dann wird einer der Werthe von $\log(u, +x)^y$ durch die Formel

$$y\log x + \log u - \log(u+xy) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=+\infty}\left\{\log(u+\alpha x) - \log(u+(y+\alpha)x) + y\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right\}$$

(wo dem Logarithmus von $1+\frac{1}{\alpha}$ sein reeller Werth beizulegen ist) dargestellt, und dieser wird durch die Gleichung (98.) gegeben, wenn man auch in dem Ausdrucke auf der Rechten die Werthe der Logarithmen

$$\log u,\ \log(u+x),\ \log(u+2x),\ \ldots,$$

aus denen die Glieder desselben zusammengesetzt sind, so, wie bestimmt worden ist, fixirt.

Auf diese Weise definirt, sind nämlich beide Seiten der genannten Gleichung stetige Functionen von u, welche der Gleichung (97.) zufolge nur um eine von u unabhängige Grösse von einander verschieden sein können.

Setzt man ferner, unter ν eine ganze positive Zahl verstehend, $u = \nu x$, so werden die Grössen

$$\log(u, +x)^y - y\log u,\quad \Delta\log u,\quad \Delta^2\log u,\quad \ldots$$

sämmtlich unendlich klein für einen unendlich grossen Werth von ν; es muss also die genannte Grösse gleich Null sein.

Da

$$(u, +x)^{y+\nu} = (u, +x)^y(u+yx, +x)^\nu = (u, +x)^\nu(u+\nu x, +x)^y,$$

also

$$(u, +x)^y = \frac{(u, +x)^\nu}{(u+yx, +x)^\nu}(u+\nu x, +x)^y$$

ist, und man die ganze positive Zahl ν so gross annehmen kann, dass die

*) Ist ξ eine positive und η eine beliebige reelle Grösse, so ist der Hauptwerth von $\log(\xi+\eta i)$ gleich $\frac{1}{2}\log(\xi^2+\eta^2)+i\,\mathrm{arc.tg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$, wo dem Logarithmus von $(\xi^2+\eta^2)$ sein reeller Werth beizulegen und der Arcus zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ anzunehmen ist.

reellen Theile von

$$\frac{u}{x}+\nu \quad \text{und} \quad \frac{u}{x}+\nu+y$$

beide positiv sind, so folgt, dass die Formel (98.) in allen Fällen zur Berechnung von $(u,+x)^y$ ausreicht.

Aus der Gleichung $(u,-x)^y = \frac{1}{(u+x,+x)^{-y}}$ ergiebt sich ferner, wenn die reellen Theile von

$$\frac{u}{x}+1 \quad \text{und} \quad \frac{u}{x}+1-y$$

beide positiv sind:

$$(99).\quad \log(u,-x)^y = y\log(u+x) - \frac{y(y+1)}{1.2}\Delta\log(u+x) + \frac{y(y+1)(y+2)}{1.2.3}\Delta^2\log(u+x) - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(y,+1)^n}{(1,+1)^n}\Delta^{n-1}\log(u+x) + \cdots,$$

wo wieder, wie in (96.), $\Delta u = x$ zu setzen ist.

Ferner hat man

$$(u,-x)^{y-\nu} = (u,-x)^y(u-yx,-x)^{-\nu} = \frac{(u,-x)^y}{(u-yx+x,+x)^\nu},$$

$$(u,-x)^{y-\nu} = (u,-x)^{-\nu}(u+\nu x,-x)^y = \frac{(u+\nu x,-x)^y}{(u+x,+x)^\nu},$$

also

$$(100.)\qquad (u,-x)^y = \frac{(u-yx+x,+x)^\nu}{(u+x,+x)^\nu}(u+\nu x,-x)^y,$$

und es lässt sich wieder in allen Fällen ν so gross annehmen, dass die Formel (99.) zur Berechnung von $(u,-x)^y$ benutzbar ist.

9.

Um eine Anwendung der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln zu geben, will ich daraus die Ausdrücke der trigonometrischen Functionen durch Facultäten herleiten.

Man hat, wenn $\sin u = z$ gesetzt wird,

$$u = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \cdots,$$

für alle reellen Werthe von u zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, diese selbst nicht ausgeschlossen.

Substituirt man nun, unter m eine ganz beliebige (complexe) Grösse verstehend, den vorstehenden Ausdruck von u in die Reihe

$$1+(mi)u+(mi)^2\frac{u^2}{1.2}+(mi)^3\frac{u^3}{1.2.3}+\cdots = e^{mui},$$

und entwickelt dann die Formel nach Potenzen von z, so muss die daraus hervorgehende Reihe, die von der Form

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha \sin^\alpha u$$

ist, in Folge des Satzes 5, B) (§ 7) ebenfalls für alle jene Werthe von u convergiren, und die Gleichung

$$e^{mui} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha \sin^\alpha u$$

bestehen.

Nachdem auf diese Weise die Bedingung, unter welcher die vorstehende Gleichung gilt, festgestellt ist, kann man sich zur Bestimmung der Coefficienten a_α irgend einer passenden Methode bedienen. Man erhält z. B. durch zweimaliges Differentiiren der Gleichung nach u, indem

$$\begin{aligned}\frac{d\sin^\alpha u}{du} &= \alpha\sin^{\alpha-1}u\cos u,\\ \frac{d^2\sin^\alpha u}{du^2} &= \alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2}u\cos^2 u-\alpha\sin^\alpha u,\\ &= \alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2}u-\alpha^2\sin^\alpha u\end{aligned}$$

ist,

$$\begin{aligned}-m^2 e^{mui} &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty} a_\alpha(\alpha(\alpha-1)\sin^{\alpha-2}u-\alpha^2\sin^\alpha u)\\ &= \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}((\alpha+2)(\alpha+1)a_{\alpha+2}\sin^\alpha u)-\sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}(\alpha^2 a_\alpha\sin^\alpha u),\end{aligned}$$

oder

$$e^{mui} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}\frac{1}{m^2}(\alpha^2 a_\alpha-(\alpha+1)(\alpha+2)a_{\alpha+2})\sin^\alpha u;$$

es muss also

$$\frac{1}{m^2}(\alpha^2 a_\alpha-(\alpha+1)(\alpha+2)a_{\alpha+2}) = a_\alpha, \qquad (\alpha=0,1,\cdots+\infty)$$

oder

$$a_{\alpha+2} = \frac{\alpha^2-m^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}a_\alpha$$

sein.

Hieraus ergiebt sich (für $\nu = 0, 1, \cdots +\infty$)

$$a_{2\nu} = \frac{\left(\frac{1}{2}m, -1\right)^{\nu}\left(-\frac{1}{2}m, -1\right)^{\nu}}{(1, +1)^{\nu}\left(\frac{1}{2}, +1\right)^{\nu}}$$

$$= (-1)^{\nu}\frac{(m, -2)^{\nu}(m, +2)^{\nu}}{(2, +2)^{\nu}(1, +2)^{\nu}}$$

$$= (-1)^{\nu}\frac{(m, -2)^{\nu}(m, +2)^{\nu}}{(1, +1)^{2\nu}},$$

$$a_{2\nu+1} = \frac{mi\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -1\right)^{\nu}\left(-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -1\right)^{\nu}}{(1, +1)^{\nu}\left(\frac{3}{2}, +1\right)^{\nu}}$$

$$= (-1)^{\nu}\frac{mi\,(m-1, -2)^{\nu}(m+1, +2)^{\nu}}{(1, +1)^{2\nu+1}},$$

indem dann wirklich

$$\frac{a_{2\nu}}{a_{2\nu-2}} = -\frac{(m-2(\nu-1))(m+2(\nu-1))}{(2\nu-1)\,2\nu} = \frac{(2\nu-2)^2-m^2}{(2\nu-1)\,2\nu}$$

$$\frac{a_{2\nu+1}}{a_{2\nu-1}} = -\frac{(m-1-2(\nu-1))(m+1+2(\nu-1))}{2\nu(2\nu+1)} = \frac{(2\nu-1)^2-m^2}{2\nu(2\nu+1)}$$

ist, und durch Substitution der Reihe $u = \sin u + \cdots$ in die Reihe für e^{mui} sich $a_0 = 1$, $a_1 = mi$ findet. Man hat daher

(101.)
$$\cos(mu) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}m, -1\right)^{\nu}\left(-\frac{1}{2}m, -1\right)^{\nu}}{(1, +1)^{\nu}\left(\frac{1}{2}, +1\right)^{\nu}}\sin^{2\nu}u\right\}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{(-1)^{\nu}\frac{(m, -2)^{\nu}(m, +2)^{\nu}}{(1, +1)^{2\nu}}\sin^{2\nu}u\right\},$$

(102.)
$$\sin(mu) = m\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -1\right)^{\nu}\left(-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, -1\right)^{\nu}}{(1, +1)^{\nu}\left(\frac{3}{2}, +1\right)^{\nu}}\sin^{2\nu+1}u\right\}$$

$$= m\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\left\{(-1)^{\nu}\frac{(m-1, -2)^{\nu}(m+1, +2)^{\nu}}{(1, +1)^{2\nu+1}}\sin^{2\nu+1}u\right\}$$

für jeden Werth von m, und für alle diejenigen reellen Werthe von u, die nicht ausserhalb des Intervalls $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Setzt man nun $u = \frac{1}{2}\pi$, und $2m$ statt m, so erhält man durch Vergleichung der so sich ergebenden Ausdrücke von $\cos(m\pi)$, $\sin(m\pi)$ mit der Formel (90.), indem man in dieser $u = \frac{1}{2}$, $y = m$, $k = -m$, und auch $u = \frac{3}{2}$, $y = m-\frac{1}{2}$, $k = m-\frac{1}{2}$ setzt:

$$(103.)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos(m\pi) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2},+1\right)^{+m}\left(\frac{1}{2},+1\right)^{-m}}, \\ \\ \sin(m\pi) = \dfrac{2m\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-1}}{\left(\frac{3}{2},+1\right)^{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-m-\frac{1}{2}}}, \end{array}\right.$$

oder, weil

$$\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{2}-1} = 2,$$

$$(1,+1)^{m} = (1,+1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2},+1\right)^{m-\frac{1}{2}},$$

$$(1,+1)^{-m} = (1,+1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2},+1\right)^{-m-\frac{1}{2}}$$

ist,

$$(104.)\quad \sin(m\pi) = \frac{4m(1,+1)^{\frac{1}{2}}(1,+1)^{\frac{1}{2}}}{(1,+1)^{+m}(1,+1)^{-m}}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch m und setzt darauf $m = 0$, so ergiebt sich:

$$(105.)\quad \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = (1,+1)^{\frac{1}{2}},$$

und daher

$$(106.)\quad \sin(m\pi) = \frac{m\pi}{(1,+1)^{-m}(1,+1)^{+m}}.$$

Da nach (83.)

$$(1,+1)^{m} = \frac{1}{Fc(1+m)}$$

ist, so erhält man aus den vorstehenden Formeln:

$$(107.)\quad \begin{aligned} \sin(m\pi) &= m\pi Fc(1+m)\,Fc(1-m) \\ &= \pi Fc(m)\,Fc(1-m), \end{aligned}$$

$$(108.)\quad \sqrt{\pi} = \frac{1}{Fc\left(\frac{1}{2}\right)},$$

und, da

$$\left(\frac{1}{2}, +1\right)^m = \frac{Fc\left(\frac{1}{2}\right)}{Fc\left(m+\frac{1}{2}\right)}$$

ist:

$$\cos(m\pi) = \pi Fc\left(\frac{1}{2}+m\right)Fc\left(\frac{1}{2}-m\right), \tag{109.}$$

übereinstimmend mit (107.), wenn man dort $m+\frac{1}{2}$ statt m setzt.

Alle diese Formeln*) gelten, nach der hier gegebenen Ableitung, für jeden reellen und imaginären Werth von m.

---

*) Setzt man die Darstellungen von $\sin(u\pi)$, $\cos(u\pi)$ in der Form unendlicher Producte als bekannt voraus, so ergeben sich die Formeln (107.), (109.) unmittelbar aus dem Ausdrucke von $Fc(u)$.

AKADEMISCHE ANTRITTSREDE,

gehalten in der öffentlichen Sitzung der Berliner Akademie am 9. Juli 1857.

Unsere heutige öffentliche Sitzung ist die erste, in welcher ich mich freue, eine Pflicht erfüllen zu können, der ich schon längst gern nachgekommen wäre.

Indem die Akademie mich der Ehre würdig gehalten, als Mitglied in Sie aufgenommen zu werden, hat Sie meinen wissenschaftlichen Bestrebungen eine Anerkennung zu Theil werden lassen, für die ich mich gedrungen fühle, Ihr meinen aufrichtigsten und wärmsten Dank auszudrücken. Wohl wissend indess, wie weit meine unter Hemmungen mannigfaltiger Art entstandenen Arbeiten von dem einst in der Begeisterung der Jugend etwas weit gesteckten Ziele, zu dem ich sie hätte führen mögen, entfernt geblieben sind, täusche ich mich nicht darüber, dass nicht sowohl meine bisherigen Leistungen, sondern hauptsächlich nur die von wohlwollenden Beurtheilern daran geknüpften Erwartungen die Akademie bei Ihrer Wahl haben leiten können. Dem Vertrauen, welches Sie mir dadurch bewiesen, einigermassen zu entsprechen, wird für mich keine leichte Aufgabe sein; ich kann nur die Versicherung geben, dass ich an ihre Lösung meine ganze Kraft setzen werde.

Ich habe nun in wenigen Worten den Gang meiner bisherigen Studien anzudeuten, und die Richtung zu bezeichnen, in welcher ich auch fernerhin fortzuschreiten mich bemühen werde.

Ein verhältnissmässig noch junger Zweig der mathematischen Analysis, die Theorie der elliptischen Functionen, hatte von der Zeit an, wo ich unter

der Leitung meines hochverehrten Lehrers Gudermann, dem ich stets eine dankbare Erinnerung bewahren werde, die erste Bekanntschaft mit derselben machte, eine mächtige Anziehungskraft auf mich geübt, die auf den ganzen Gang meiner mathematischen Ausbildung von bestimmendem Einflusse geblieben ist. Die von Euler begründete und von Legendre mit Eifer und Erfolg, aber in zu einseitiger Richtung weitergeförderte Disciplin hatte damals seit etwa einem Decennium eine gänzliche Umgestaltung erfahren durch die Einführung der von Abel und Jacobi entdeckten doppelt-periodischen Functionen, in denen die Analysis eine neue, durch höchst merkwürdige Eigenschaften ausgezeichnete Gattung von Grössen gewonnen, welche alsbald auch auf dem Gebiete der Geometrie und Mechanik die vielfältigsten Anwendungen fanden, und auch dadurch den Beweis lieferten, dass sie die gesunde Frucht einer naturgemässen Fortentwicklung der Wissenschaft seien. Nun hatte aber Abel, der gewohnt war, überall den höchsten Standpunkt zu nehmen, ein Theorem hingestellt, welches alle aus der Integration algebraischer Differentiale entspringenden Transcendenten umfassend, für diese dieselbe Bedeutung hatte wie das Euler'sche für die elliptischen. In der Blüthe seines Lebens dahingerafft, hatte er selbst seine grosse Entdeckung nicht verfolgen können; es war aber Jacobi gelungen, eine nicht minder wichtige daran zu knüpfen, indem er die Existenz periodischer Functionen mehrerer Argumente nachwies, deren Fundamental-Eigenschaften in dem Abel'schen Theorem begründet sind, wodurch zugleich der wahre Sinn und das eigentliche Wesen desselben aufgeschlossen wurden. Diese Grössen einer ganz neuen Art, für welche die Analysis noch kein Beispiel hatte, wirklich darzustellen und ihre Eigenschaften näher zu ergründen, ward von nun an eine der Hauptaufgaben der Mathematik, an der auch ich mich zu versuchen entschlossen war, sobald ich den Sinn und die Bedeutung derselben klar erkannt hatte. Freilich wäre es thöricht gewesen, wenn ich an die Lösung eines solchen Problems auch nur hätte denken wollen, ohne mich durch ein gründliches Studium der vorhandenen Hülfsmittel und durch Beschäftigung mit minder schweren Aufgaben dazu vorbereitet zu haben. So sind Jahre verflossen, ehe ich an die eigentliche Arbeit gehen konnte, die ich, gehemmt durch die Ungunst der Verhältnisse, auch seitdem nur langsam zu fördern vermocht habe. Wenn ich aber gleichwohl so glücklich war, zu einigen Resultaten zu gelangen,

welche die Akademie mit Ihrem Beifall geehrt hat, obgleich ich sie erst in unvollkommener Gestalt habe veröffentlichen können, so brauche ich wohl nicht ausdrücklich anzugeben, in welcher Richtung das Ziel liegt, wohin sich zunächst nun meine Bestrebungen werden richten müssen.

Glücklich aber würde ich mich schätzen, wenn ich späterhin aus meinen Studien auch für die Anwendungen der Mathematik, namentlich auf Physik, einigen Gewinn ziehen könnte. Ich habe schon angedeutet, dass es mir keineswegs gleichgültig ist, ob eine Theorie sich für solche Anwendungen eigne oder nicht. Dabei fürchte ich nicht, dass man mir vorwerfe, es werde die Bedeutung, welche die Mathematik als reine Wissenschaft mit vollstem Rechte beansprucht, herabgesetzt, wenn ich sie ganz besonders auch darum hochstelle, weil durch sie allein ein wahrhaft befriedigendes Verständniss der Naturerscheinungen vermittelt wird. Niemand zwar kann bereitwilliger als ich es anerkennen, dass man den Zweck einer Wissenschaft nicht ausserhalb derselben suchen darf, und dass es nicht nur ihre Würde beeinträchtigen, nein, dass es geradezu an ihr sich versündigen heisst, wenn man, statt sich ihr mit vollster Liebe und Hingebung zu widmen, nur Dienste von ihr verlangt, nur sie brauchen will für irgend eine andre Disciplin oder für die Bedürfnisse des Lebens, und darum wohl gar sich vermisst, der weiterschreitenden Forschung ihren Weg vorzeichnen zu wollen, und jede Richtung verwirft, die nicht sofort zu practisch verwerthbaren Resultaten zu führen scheint. Ich meine aber, es muss das Verhältniss zwischen Mathematik und Naturforschung etwas tiefer aufgefasst werden, als es geschehen würde, wenn etwa der Physiker in der Mathematik nur eine wenn auch unentbehrliche Hülfsdisciplin achten, oder der Mathematiker die Fragen, die jener ihm stellt, nur als eine reiche Beispiel-Sammlung für seine Methoden ansehen wollte. Ich darf jedoch heute diesen Gegenstand, der mir allerdings sehr am Herzen liegt, nicht weiter verfolgen. Auf die Frage aber, die ich schon vernommen, ob es denn wirklich möglich sei, aus den abstracten Theorien, welchen sich die heutige Mathematik mit Vorliebe zuzuwenden scheine, auch etwas unmittelbar Brauchbares zu gewinnen, möchte ich entgegnen, dass doch auch nur auf rein speculativem Wege griechische Mathematiker die Eigenschaften der Kegelschnitte ergründet hatten, lange bevor irgend wer ahnte, dass sie die Bahnen seien, in welchen die Planeten wandeln, und dass ich allerdings

der Hoffnung lebe, es werde noch mehr Functionen geben mit Eigenschaften, wie sie Jacobi an seiner θ-Function rühmt, die lehrt, in wie viel Quadrate sich jede Zahl zerlegen lässt, wie man den Bogen einer Ellipse rectificirt, und dennoch, setze ich hinzu, im Stande ist, und zwar sie allein, das wahre Gesetz darzustellen, nach welchem das Pendel schwingt.

ÜBER DIE INTEGRATION ALGEBRAISCHER DIFFERENTIALE VERMITTELST LOGARITHMEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 26. Februar 1857.)

Das erste diesjährige Heft des Liouville'schen Journals [2^e Série, T. II, p. 1] enthält eine Abhandlung von Herrn Tschebyscheff, in der ein Verfahren entwickelt wird, um bei einem vorgelegten Differentiale von der Form

$$\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}},$$

wo R eine ganze Function 4^{ten} Grades von x, ρ aber eine beliebige rationale Function bedeuten soll, zu entscheiden, ob dasselbe sich durch Logarithmen integriren lasse oder nicht, und zugleich, wenn das Erstere der Fall ist, die Integration wirklich auszuführen. Der Verfasser setzt dabei die Resultate einer früheren Arbeit voraus, in welcher er dieselbe Frage für den Fall, dass der zu integrirende Ausdruck rational aus der unabhängigen Veränderlichen und irgend einer Wurzel einer ganzen Function derselben zusammengesetzt ist, behandelt, sich aber damit begnügt, zu zeigen, wie man den algebraischen Theil des gesuchten Integrals finden könne, und von den logarithmischen Gliedern die Form anzugeben, ohne auf die wirkliche Bestimmung derselben einzugehen. Das ganz allgemeine Problem aber, ein algebraisches Differential logarithmisch zu integriren, wofern dies überhaupt möglich ist, hatte sich schon Abel gestellt, und war, wie aus einem wenige

Monate vor seinem Tode geschriebenen Briefe an Legendre erhellt, zu bedeutenden Resultaten gelangt, wie es denn auch sehr wahrscheinlich ist, dass eben diese Untersuchungen ihn zu dem Theorem geführt haben, welches unter seinen grossen Entdeckungen vorzugsweise seinen Namen trägt. Allein es war ihm nicht vergönnt, seine Arbeiten abzuschliessen, oder auch nur die bereits gewonnenen Ergebnisse vollständig zu veröffentlichen, so dass sich in den von ihm selbst und nach seinem Tode herausgegebenen Abhandlungen nur einige besondere Fälle der in Rede stehenden Aufgabe behandelt finden. Die erste, welche hierher gehört, steht in den nachgelassenen Werken und beschäftigt sich mit der Reduction der elliptischen Integrale auf die kleinste Anzahl von Transcendenten. Sie ist offenbar eine seiner frühesten; die Darstellung ist noch wenig elegant, und die Lösung des gestellten Problems wird mehr auf dem Wege mechanischer, dem betrachteten Einzelfalle angepasster Rechnung, als aus allgemeinen Principien gewonnen. In einer anderen, im ersten Bande des Crelle'schen Journals veröffentlichten Arbeit wird die Frage beantwortet, unter welchen Bedingungen sich das Differential

$$\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$$

unter der Voraussetzung, dass R und ρ ganze Functionen von x seien, durch einen logarithmischen Ausdruck von der Form

$$\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right),$$

in dem p, q ebenfalls ganze Functionen sein sollen, integriren lasse; wobei sich der merkwürdige Satz ergiebt, dass dieses nur angeht, wenn der Kettenbruch, in welchen sich die Wurzelgrösse entwickeln lässt, periodisch ist.

An dieses Resultat nun knüpft Herr Tschebyscheff an, und gelangt, indem er R auf den 4^{ten} Grad beschränkt, an die Stelle von ρ aber eine beliebige rationale Function setzt, so dass es sich jetzt um das allgemeinste elliptische Integral handelt, durch eine Reihe algebraischer Umformungen dahin, für dieses das zu lösende Problem auf das von Abel behandelte zurückzuführen.

Hierbei muss ich jedoch bemerken, dass bei der angegebenen Beschränkung der Aufgabe dieselbe eigentlich schon vollständig erledigt ist durch die von Abel in seiner letzten leider unvollendet gebliebenen Arbeit in Betreff

der allgemeinsten unter elliptischen, logarithmischen und algebraischen Functionen möglichen Relationen entwickelten Principien, welche zugleich eine klarere und tiefere Einsicht in das Wesen der Sache gewähren, als man sie erhalten kann, wenn man ohne Rücksicht auf die Theorie der ganzen Gattung von Grössen, zu denen die betrachtete gehört, das gewünschte Resultat unmittelbar durch eine algebraische Rechnung, die nothwendig sehr complicirt wird, zu erreichen sich vorsetzt. Am einfachsten und übersichtlichsten gestaltet sich aber die ganze Untersuchung, wenn man, nachdem das vorgelegte Integral durch eine einfache Substitution auf die Form

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}}$$

gebracht worden, wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeuten soll, $x = \sin^2 \mathrm{am}\, u$ setzt, und nun dasselbe als Function von u betrachtet. Dann kann man ihm, unter Beibehaltung der in Jacobi's Fundamenten gebrauchten Bezeichnungen, stets die Gestalt

$$V_0 + \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \cdots + \beta u + \gamma E(u)$$

geben, in welcher Formel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta, \gamma$ Constanten sind, V_0 eine rationale Function von $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ und $\frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du}$ (oder x und $\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}$), die Grössen $W_1, W_2, \ldots$ aber Ausdrücke von der Form

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \Pi(u, a) + \mu_1 \Pi(u, b) + \nu_1 \Pi(u, c) + \cdots, \\ &\lambda_2 \Pi(u, a) + \mu_2 \Pi(u, b) + \nu_2 \Pi(u, c) + \cdots, \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

in denen $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots, \lambda_2, \mu_2, \nu_2, \ldots$ ganze Zahlen sind, bezeichnen. Dabei darf angenommen werden, dass unter den Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ keine Relation

$$m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \cdots = 0$$

unter der Bedingung, dass $m_1, m_2, \ldots$ rationale Zahlen seien, bestehe.

Wenn sich nun der vorstehende Ausdruck soll durch Logarithmen ausdrücken lassen, so ist leicht zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2n_1} \log V_1 + \varepsilon_1 u, \\ W_2 &= \frac{1}{2n_2} \log V_2 + \varepsilon_2 u, \\ &\quad \cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

sein muss, wo $n_1, n_2, \ldots$ ganze positive Zahlen, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Constanten, und $V_1, V_2, \ldots$ rationale Functionen von $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ und $\frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, u}{du}$ bedeuten. Dann aber werden

$$e^{-2n_1\varepsilon_1 u + 2n_1 W_1} = V_1, \qquad e^{-2n_2\varepsilon_2 u + 2n_2 W_2} = V_2, \quad \ldots$$

eindeutige Functionen von u, welche die Perioden $2K$ und $2K'i$ haben. Daraus erhält man sofort die Bedingungsgleichungen, welche die Parameter $a, b, c, \ldots$ erfüllen müssen, nämlich

$$\begin{aligned} \lambda_1 a + \mu_1 b + \nu_1 c + \cdots &= \frac{\mathfrak{m}_1 K + \mathfrak{n}_1 K'i}{n_1}, \\ \lambda_2 a + \mu_2 b + \nu_2 c + \cdots &= \frac{\mathfrak{m}_2 K + \mathfrak{n}_2 K'i}{n_2}, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

in denen unter $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}_2, \ldots$ ganze Zahlen zu verstehen sind. Und umgekehrt, wenn

$$\lambda_1 a + \mu_1 b + \nu_1 c + \cdots, \qquad \lambda_2 a + \mu_2 b + \nu_2 c + \cdots, \quad \ldots$$

sich auf diese Weise durch K und $K'i$ ausdrücken lassen, so kann man vermittelst der Formeln für die Addition und Subtraction der Parameter bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale die Grössen $W_1, W_2, \ldots$ wirklich in der angegebenen Weise darstellen, wobei sich

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda_1 E(a) + \mu_1 E(b) + \nu_1 E(c) + \cdots - \frac{\mathfrak{m}_1 E + \mathfrak{n}_1 (K' - E')i}{n_1}, \\ \varepsilon_2 &= \lambda_2 E(a) + \mu_2 E(b) + \nu_2 E(c) + \cdots - \frac{\mathfrak{m}_2 E + \mathfrak{n}_2 (K' - E')i}{n_2}, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

als rationale Functionen von

$$\sin^2 \mathrm{am}\, a, \qquad \sin^2 \mathrm{am}\, b, \qquad \sin^2 \mathrm{am}\, c, \quad \ldots$$

und

$$\frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, a}{da}, \qquad \frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, b}{db}, \qquad \frac{d \sin^2 \mathrm{am}\, c}{dc}, \quad \ldots$$

ergeben. Substituirt man dann die vorstehenden Ausdrücke für $W_1, W_2, \ldots$ in die Formel

$$V_0 + \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \cdots + \beta u + \gamma E(u),$$

so müssen aus derselben sowohl u als $E(u)$ fortfallen, wodurch man die

weiteren Bedingungen

$$\gamma = 0, \qquad \beta = -(\alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 + \cdots)$$

erhält.

Es bedarf keiner Erinnerung, dass diese Bedingungen sich nun auch algebraisch durch die Constanten, welche in dem vorgelegten Differentiale unmittelbar vorkommen, ausdrücken lassen. Die dazu nöthigen Algorithmen sind aber keine neuen, sondern solche, die den Elementen der Theorie der elliptischen Functionen angehören, wie überhaupt die im Vorhergehenden angedeutete Behandlungsweise des in Rede stehenden Problems den grossen Vortheil hat, dass sie nur die Fundamental-Sätze über die elliptischen Functionen voraussetzt, deren Kenntniss es möglich macht, das ausgesprochene Resultat fast ganz ohne eigentliche Rechnung abzuleiten. Was noch zu wünschen übrig bleibt, ist ein directes Verfahren, um das betrachtete Integral auf die hier vorausgesetzte Form zu bringen. Die Methoden, welche dafür gewöhnlich angegeben werden, sind wenig brauchbar; sie lassen sich aber durch eine andere ersetzen, welche auf dem Satze von der Vertauschung von Argument und Parameter bei der dritten Gattung der elliptischen Integrale beruht, und die ihren Zweck vollständig zu erfüllen scheint.

Die Leichtigkeit aber, mit der sich in der dargestellten Weise für die elliptischen Transcendenten die Bedingungen, unter denen sie auf Logarithmen reducirbar sind, aus den Fundamental-Sätzen der Theorie ableiten lassen, hat mich veranlasst, dieselbe Untersuchung für beliebige algebraische Differentiale in ihrer ganzen Allgemeinheit wieder aufzunehmen. Seit geraumer Zeit beschäftige ich mich mit der Theorie der Transcendenten, die aus der Integration solcher Differentiale entspringen, in der Hoffnung, dass es mir gelingen werde, auch für sie alle die Probleme zu lösen, welche ich für eine besondere Gattung derselben in meiner Theorie der Abel'schen Functionen behandle. Meine Bemühungen sind nicht ohne Erfolg geblieben; die wesentlichsten Schwierigkeiten, die zu überwinden waren, sind glücklich beseitigt, und ich habe nur noch verhältnissmässig wenige Fragen zu erledigen, um die Lösung der Hauptaufgaben, um die es sich handelt, und welche ein grosses Gebiet der Analysis umfassen, zu vollenden. Das Abel'sche Theorem, welches eine wesentliche Eigenschaft der Integrale algebraischer Differentiale ausspricht, und die Lehre von den Perioden derselben — die nach meiner Über-

zeugung das Fundament der ganzen Integral-Rechnung bildet, und aus der z. B., wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, das Abel'sche Theorem selbst als ein einfaches Corollar sich ergiebt — sind die hauptsächlichsten dabei zur Anwendung kommenden Hülfsmittel, so dass meine Bemühungen vor allen Dingen auf deren weitere Ausbildung und Fruchtbarmachung gerichtet sein mussten. Ich habe mich nun überzeugt, dass sie auch vollständig ausreichen, um alle Fragen, auf welche man bei der erwähnten Untersuchung geführt wird, zu beantworten, und zwar dem Principe nach eben so einfach, wie es bei den elliptischen Integralen möglich ist — ein Resultat, welches, denke ich, wenigstens diejenigen Mathematiker interessiren wird, welchen es Befriedigung gewährt, wenn es gelingt, irgend ein Kapitel der Wissenschaft zu einem wirklichen Abschlusse zu bringen. Die Logarithmen sind die ersten und einfachsten transcendenten Grössen, zu welchen man in der Integral-Rechnung geführt wird; es ist daher die Frage, welche Integrationen mit ihrer Hülfe überhaupt können ausgeführt werden, eine unabweisliche, die freilich in den Lehrbüchern bis jetzt kaum berührt wird — auch nicht von den Autoren, die sich darin gefallen haben, einer mehr oder minder zweckmässigen Zusammenstellung der durch die Bemühungen Euler's, Legendre's u. A. gewonnenen Resultate den stolzen Namen eines Systems der Integral-Rechnung zu geben.

Für die Integrale von der Form

$$\int F(x, \sqrt[m]{R(x)})\, dx,$$

wo $R(x)$ eine ganze Function von x, F eine rationale Function von x und $\sqrt[m]{R(x)}$ bedeutet, habe ich die Untersuchung bereits vollständig durchgeführt, und werde mir die Freiheit nehmen, die Ergebnisse derselben in einer folgenden Mittheilung der Akademie vorzulegen.

ÜBER EIN DIE HOMOGENEN FUNCTIONEN ZWEITEN GRADES BETREFFENDES THEOREM, NEBST ANWENDUNG DESSELBEN AUF DIE THEORIE DER KLEINEN SCHWINGUNGEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 4. März 1858.)

Wenn zwei ganze und homogene Functionen zweiten Grades Φ, Ψ von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben sind, so ist es im Allgemeinen immer möglich, dieselben in der Form

$$\Phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n$$
$$\Psi = s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 + \cdots + s_n\vartheta_n$$

dergestalt darzustellen, dass $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ die Quadrate homogener linearer Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und $s_1, s_2, \ldots s_n$ Constanten sind. Bezeichnet man, unter s eine willkürliche Grösse verstehend, die Determinante von

$$s\Phi - \Psi$$

mit $f(s)$, so sind bekanntlich $s_1, s_2, \ldots s_n$ diejenigen Werthe von s, welche

$$f(s) = 0$$

machen — wie sofort daraus erhellt, dass sich $s\Phi - \Psi$, wenn man s einen dieser Werthe beilegt, durch weniger als n lineare Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausdrücken lässt —, während die Coefficienten von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_n$ rational aus denen von Φ, Ψ und aus $s_1, s_2, \ldots s_n$ zusammengesetzt werden.

Diese Transformation von Φ, Ψ ist eine der interessantesten und wichtigsten algebraischen Aufgaben, welcher man bei den verschiedenartigsten Untersuchungen begegnet. Für den Fall, dass unter den Grössen $s_1, s_2, \ldots s_n$ keine zwei gleiche sich finden, ist sie von Cauchy, Jacobi u. A. so vollständig

behandelt worden, dass wohl nichts zu wünschen übrig bleibt. Dagegen scheint es nicht, als ob den eigenthümlichen Umständen, die eintreten, wenn die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind, besondere Beachtung geschenkt, und die Schwierigkeiten, die sich alsdann darbieten, und auf die ich bei einer nachher näher zu besprechenden Frage aufmerksam geworden bin, schon gehörig aufgeklärt seien. Auch glaubte ich anfangs, es würde dies bei der grossen Zahl verschiedener Fälle, die vorkommen können, nicht ohne weitläufige Erörterungen möglich sein. Um so erwünschter war es mir, zu finden, dass sich die von den genannten Mathematikern gegebene Lösung der Aufgabe in einer Weise modificiren lässt, bei der es ganz gleichgültig ist, ob unter den Grössen $s_1, s_2, \ldots s_n$ gleiche vorkommen oder nicht.

1.

Es mögen Φ, Ψ zunächst keiner andern Beschränkung unterworfen werden, als dass die Determinante von Φ nicht Null sein soll. Man setze, mit α, wie überhaupt im Folgenden mit den ersten griechischen Buchstaben α, β, γ, eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ bezeichnend,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\alpha} = \Phi_\alpha, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x_\alpha} = \Psi_\alpha,$$

und drücke $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch

$$s\Phi_1 - \Psi_1,\ s\Phi_2 - \Psi_2,\ \ldots\ s\Phi_n - \Psi_n$$

aus. So erhält man

$$x_\alpha = \sum_\beta \left\{ \frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} (s\Phi_\beta - \Psi_\beta) \right\}, \tag{1.}$$

wo $f(s)_{\alpha\beta}$ eine ganze Function von nicht höherem als dem $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade bedeutet, und das Zeichen $\sum_\beta$ andeuten möge, dass die Summation in Beziehung auf β auszuführen, und dieser Zahl alle in der Reihe $1, 2, \ldots n$ enthaltenen Werthe beizulegen seien. Dann ist

$$f(s)_{\alpha\beta} = f(s)_{\beta\alpha}. \tag{2.}$$

In der Gleichung (1.) muss aber der Ausdruck auf der Rechten von s unabhängig sein. Entwickelt man ihn daher nach fallenden Potenzen von s, so

ist nur der Coefficient von s^0 nicht Null. In der Entwicklung von

$$\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$$

kommen ferner nur negative Potenzen von s vor; denn $f(s)$ ist eine ganze Function n^{ten} Grades von s, und der Coefficient von s^n in derselben, der nichts Anderes als die Determinante von Φ ist, nicht Null. Bestimmt man daher zunächst den Coefficienten von s^0 in der Entwicklung des genannten Ausdrucks, und bemerkt, dass

$$\left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^0} = \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}}$$

ist, so ergiebt sich

$$x_\alpha = \sum_\beta \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\beta, \tag{3.}$$

und wenn man den Coefficienten von s^{-1} in derselben Entwicklung bestimmt,

$$\sum_\beta \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Psi_\beta = \sum_\beta \left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\beta. \tag{4.}$$

Es ist aber

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi = \sum_\alpha \Phi_\alpha x_\alpha \\ \Psi = \sum_\alpha \Psi_\alpha x_\alpha. \end{array}\right. \tag{5.}$$

Daher

$$\Phi = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\alpha \Phi_\beta, \tag{6.}$$

$$\Psi = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Psi_\alpha \Phi_\beta = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\alpha \Psi_\beta \tag{7.}$$

und in Folge von (4.)

$$\Psi = \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right]_{s^{-1}} \Phi_\alpha \Phi_\beta. \tag{8.}$$

Nun seien $s_1, s_2, \ldots s_m$ die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$. Dann hat man, wenn $F(s)$ eine beliebige ganze Function von s, und

$$\left\{\frac{F(s)}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}$$

den Coefficienten von $(s-s_\mu)^{-1}$ in der Entwicklung von $\frac{F(s)}{f(s)}$ nach steigenden Potenzen von $s-s_\mu$ bezeichnet,

$$(9.) \qquad \left[\frac{F(s)}{f(s)}\right]_{s^{-1}} = \sum_{\mu=1,\dots m}\left\{\frac{F(s)}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}.$$

Wird daher für $\mu = 1, 2, \dots m$

$$(10.) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha\beta}\left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}\Phi_\alpha\Phi_\beta = \vartheta_\mu \\ \sum\limits_{\alpha\beta}\left\{\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}\Phi_\alpha\Phi_\beta = \Theta_\mu \end{cases}$$

gesetzt, so hat man

$$(11.) \qquad \begin{cases} \Phi = \vartheta_1+\vartheta_2+\dots+\vartheta_m \\ \Psi = \Theta_1+\Theta_2+\dots+\Theta_m. \end{cases}$$

Dies sind Transformationen von Φ und Ψ, aus denen die Lösung der gestellten Aufgabe in allen Fällen, wo sie möglich ist, abgeleitet werden kann.

2.

Nehmen wir zunächst an, es sei $m = n$, so dass unter den Grössen $s_1, s_2, \dots s_n$ keine zwei gleiche vorkommen. (Man beweist leicht, dass dies im Allgemeinen der Fall ist. Denn die Bedingungsgleichung, die erfüllt sein muss, wenn die Gleichung $f(s) = 0$ gleiche Wurzeln haben soll, kann nicht etwa für beliebige Werthe der Coefficienten von Φ, Ψ bestehen, indem z. B wenn man

$$\Phi = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$$
$$\Psi = A_1x_1^2+A_2x_2^2+\dots+A_nx_n^2$$

hat,

$$f(s) = (s-A_1)(s-A_2)\dots(s-A_n)$$

ist.) Dann hat man, da

$$\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} = \frac{s_\mu f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} + \frac{(s-s_\mu)f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}$$

und $\frac{s-s_\mu}{f(s)}$ nicht ∞ wird für $s = s_\mu$,

$$\left\{\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} = s_\mu\left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}$$

und

$$\left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} = \frac{f(s_\mu)_{\alpha\beta}}{f'(s_\mu)},$$

folglich

$$\vartheta_\mu = \sum_{\alpha\beta} \frac{f(s_\mu)_{\alpha\beta}}{f'(s_\mu)} \cdot \Phi_\alpha \Phi_\beta, \qquad \Theta_\mu = s_\mu \vartheta_\mu \tag{12.}$$

und

$$\begin{cases} \Phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n \\ \Psi = s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 + \cdots + s_n\vartheta_n. \end{cases} \tag{13.}$$

Nach einem bekannten Determinantensatze ist ferner

$$f(s)_{\alpha\beta} f(s)_{\alpha\gamma} - f(s)_{\alpha\alpha} f(s)_{\beta\gamma}$$

gleich dem Producte aus $f(s)$ und einer anderen ganzen Function von s, folglich für $s = s_\mu$

$$f(s_\mu)_{\alpha\beta} f(s_\mu)_{\alpha\gamma} = f(s_\mu)_{\alpha\alpha} f(s_\mu)_{\beta\gamma}. \tag{14.}$$

Aus den in dieser Gleichung zusammengefassten Relationen, in Verbindung mit der schon angeführten

$$f(s_\mu)_{\alpha\beta} = f(s_\mu)_{\beta\alpha} \tag{15.}$$

ergiebt sich aber, dass ϑ_μ das Quadrat einer linearen Function y_μ von Φ_1, $\Phi_2, \ldots \Phi_n$ ist. Auch erhält man sofort zur Bestimmung derselben die eleganten zuerst von Jacobi aufgestellten Formeln, nach welchen, wenn

$$y_\gamma = \overset{\gamma}{a}_1 \Phi_1 + \overset{\gamma}{a}_2 \Phi_2 + \cdots + \overset{\gamma}{a}_n \Phi_n \tag{16.}$$

gesetzt wird,

$$\overset{\gamma}{a}_\alpha \overset{\gamma}{a}_\alpha = \frac{f(s_\gamma)_{\alpha\alpha}}{f'(s_\gamma)}, \qquad \overset{\gamma}{a}_\alpha \overset{\gamma}{a}_\beta = \frac{f(s_\gamma)_{\alpha\beta}}{f'(s_\gamma)} \tag{17.}$$

ist. Endlich folgt aus den entwickelten Formeln

$$x_\alpha = \sum_\gamma \overset{\gamma}{a}_\alpha y_\gamma. \tag{18.}$$

3.

Nehmen wir nun an, es seien die Coefficienten von Φ, Ψ sämmtlich reell. Wenn dann auch $s_1, s_2, \ldots s_n$ alle reell sind, so ist dies auch mit den Qua-

draten von $y_1, y_2, \dots y_n$ der Fall, und man kann setzen

$$y_1^2 = \varepsilon_1 z_1^2, \quad y_2^2 = \varepsilon_2 z_2^2, \quad \dots \quad y_n^2 = \varepsilon_n z_n^2,$$

wo $z_1, z_2, \dots z_n$ lineare Functionen von $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ oder $x_1, x_2, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten, jeder der Factoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ aber entweder $+1$ oder -1 sein soll, so dass

$$(19.) \qquad \begin{cases} \Phi = \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \cdots + \varepsilon_n z_n^2 \\ \Psi = \varepsilon_1 s_1 z_1^2 + \varepsilon_2 s_2 z_2^2 + \cdots + \varepsilon_n s_n z_n^2 \end{cases}$$

wird.

Kommen aber unter den Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ imaginäre vor, so seien diese die $2r$ ersten, und man setze

$$s_1 = p_1 + q_1 i, \quad s_2 = p_1 - q_1 i, \quad \dots \quad s_{2r-1} = p_r + q_r i, \quad s_{2r} = p_r - q_r i,$$

wo $p_1, q_1, \dots p_r, q_r$ reelle Grössen sein sollen. Dann lässt sich ϑ_1 in der Form

$$k_1 z_1^2$$

darstellen, wo z_1 eine lineare Function von $\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n$ ist, deren Coefficienten ebenso wie k_1 rational aus denen von Φ, Ψ und aus s_1 zusammengesetzt sind. Man hat also

$$\vartheta_1 = (g_1 + h_1 i)(u_1 + v_1 i)^2,$$

wo g_1, h reelle Constanten, und u_1, v_1 lineare Functionen von $x_1, \dots x_n$ mit reellen Coefficienten sind. Dann ist aber

$$\vartheta_2 = (g_1 - h_1 i)(u_1 - v_1 i)^2,$$

und daher

$$\begin{aligned} \vartheta_1 + \vartheta_2 &= 2g_1(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1 u_1 v_1 \\ s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 &= 2(g_1 p_1 - h_1 q_1)(u_1^2 - v_1^2) - 4(g_1 q_1 + h_1 p_1) u_1 v_1 \\ &= 2g_1'(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1' u_1 v_1. \end{aligned}$$

Verfährt man ebenso, wenn $r > 2$, mit ϑ_3 und ϑ_4 u. s. w., so ergeben sich jetzt die Darstellungen

$$(20.) \qquad \begin{cases} \Phi = 2g_1(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1 u_1 v_1 + \cdots + 2g_r(u_r^2 - v_r^2) - 4h_r u_r v_r + \varepsilon_{2r+1} z_{2r+1}^2 + \cdots + \varepsilon_n z_n^2 \\ \Psi = 2g_1'(u_1^2 - v_1^2) - 4h_1' u_1 v_1 + \cdots + 2g_r'(u_r^2 - v_r^2) - 4h_r' u_r v_r + \varepsilon_{2r+1} s_{2r+1} z_{2r+1}^2 + \cdots + \varepsilon_n s_n z_n^2, \end{cases}$$

in welchen Formeln jetzt alle vorkommenden Grössen reell sind.

Eine Function

$$g(u^2 - v^2) + huv,$$

wo g, h beliebige reelle Constanten bedeuten sollen, kann für reelle Werthe von u, v sowohl positive als negative Werthe annehmen. Da nun die Functionen

$$u_1, v_1, \ldots u_r, v_r, z_{2r+1}, \ldots z_n$$

nothwendig unabhängig von einander sind, und auch g_1, h_1 nicht beide Null sein können, weil sonst die Determinante von Φ Null sein müsste, so wird man reelle Werthe von $x_1, \ldots x_n$ dergestalt bestimmen können, dass die vorstehenden Functionen alle Null werden, mit Ausnahme von u_1, v_1, diese aber beliebig festgesetzte Werthe erhalten. Folglich wird Φ bei reellen Werthen von $u_1, u_2, \ldots u_n$ sowohl positiv als negativ werden können. Dasselbe lässt sich von Ψ sagen. Denn da s_1 imaginär, also nicht Null sein soll, so ist auch

$$g_1' + h_1' i = (p_1 + q_1 i)(g_1 + h_1 i)$$

nicht Null, also sicher auch nicht jede der Grössen g_1', h_1', was genügt, um für Ψ denselben Schluss zu machen wie für Φ.

Hieraus folgt nun unmittelbar der wichtige, für den Fall, wo

$$\Phi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

ist, zuerst von Cauchy, und später in directerer Weise von den Herren Borchardt und Sylvester bewiesene Satz, dass die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$, vorausgesetzt zunächst, dass sich keine gleichen unter ihnen finden, nothwendig alle reell sind, sobald eine der Functionen Φ, Ψ bei reellen Werthen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält.

4.

Gehen wir jetzt zu dem Falle über, wo die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ nicht alle von einander verschieden sind. Die in den Formeln (10.), (11.) vorkommenden zusammengehörigen Functionen ϑ_μ, θ_μ haben alsdann nur die Eigenschaft, dass sie sich, wenn s_μ eine λfache Wurzel der genannten Gleichung ist, beide durch dieselben λ lineareu Ausdrücke von $x_1, x_2, \ldots x_n$ darstellen lassen. Aber es ist im Allgemeinen nicht möglich, dies so zu bewerkstelligen, dass in beiden nur die Quadrate der neuen Veränderlichen vorkommen. Hierzu ist nämlich erforderlich, dass $\theta_\mu = s_\mu \vartheta_\mu$ sei; und dieses findet nur statt, wenn eine Anzahl von Bedingungsgleichungen unter den

Coefficienten von Φ, Ψ und s_μ erfüllt sind, welche keine algebraische Folge derer sind, die ausdrücken, dass s_μ eine mehrfache Wurzel der Gleichung $f(s) = 0$ ist.

Hier tritt nun aber ein sehr bemerkenswerther Umstand ein. Wenn nämlich Φ, Ψ reelle Coefficienten haben, und überdies Φ für reelle Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält, so folgt hieraus allein, dass s_μ stets eine $(\lambda-1)$fache Wurzel sämmtlicher Gleichungen

$$f(s)_{\alpha\beta} = 0$$

wird, sobald sie eine λfache der Gleichung $f(s) = 0$ ist. Dann aber hat man

$$\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)} = \frac{f^{(1)}_{\alpha\beta}}{s-s_1} + \frac{f^{(2)}_{\alpha\beta}}{s-s_2} + \cdots + \frac{f^{(m)}_{\alpha\beta}}{s-s_m}, \tag{21.}$$

wo $f^{(1)}_{\alpha\beta}$ u. s. w. von s unabhängige Grössen sind, und es ist

$$\left\{\frac{sf(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}} = s_\mu \left\{\frac{f(s)_{\alpha\beta}}{f(s)}\right\}_{(s-s_\mu)^{-1}}, \tag{22.}$$

$$\Theta_\mu = s_\mu \vartheta_\mu. \tag{23.}$$

Stellt man nun, was immer möglich ist, ϑ_μ als Summe von λ_μ Quadraten dar, so werden auch jetzt Φ, Ψ durch die Quadrate derselben n linearen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt.

Zum Beweise der angegebenen Eigenschaft der Functionen $f(s)_{\alpha\beta}$ dient die folgende Formel, welche man leicht aus der Regel ableitet, nach der eine Determinante, deren Elemente lineare Functionen einer Veränderlichen sind, in Beziehung auf diese differentiirt wird. Es sei

$$\Phi = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

wo

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha},$$

so hat man

$$f(s)_{\gamma\gamma} \frac{df(s)}{ds} - f(s) \frac{df(s)_{\gamma\gamma}}{ds} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} f(s)_{\alpha\gamma} f(s)_{\beta\gamma}. \tag{24.}$$

Dann ist zu bemerken, dass auch in dem jetzt betrachteten Falle die Grössen $s_1, s_2, \ldots s_m$ sämmtlich reell sind. Denn angenommen, eine von ihnen sei imaginär, so könnte man durch unendlich kleine Variationen der Coefficienten

von Ψ bewirken, dass die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ alle von einander verschieden würden, eine derselben aber imaginär bliebe, was nach dem vorhin Bewiesenen nicht sein kann. Dieses vorausgesetzt, denke man sich γ einen bestimmten Werth beigelegt, und dann die Functionen

$$\frac{f(s)_{1\gamma}}{f(s)}, \quad \frac{f(s)_{2\gamma}}{f(s)}, \quad \cdots \quad \frac{f(s)_{n\gamma}}{f(s)}$$

nach steigenden Potenzen von $(s-s_\mu)$ entwickelt, und bezeichne mit l den Grad des niedrigsten Gliedes, das in diesen Reihen vorkommt; so kann man setzen

$$\frac{f(s)_{\alpha\gamma}}{f(s)} = h_{\alpha\gamma}(s-s_\mu)^l + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } (s-s_\mu).$$

Die Coefficienten $h_{\alpha\gamma}$ sind dann reell, und nicht sämmtlich Null. Aus der Gleichung (24.) folgt nun

$$\frac{d\left(\frac{f(s)_{\gamma\gamma}}{f(s)}\right)}{ds} = -\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \frac{f(s)_{\alpha\gamma}}{f(s)} \frac{f(s)_{\beta\gamma}}{f(s)},$$

$$lh_{\gamma\gamma}(s-s_\mu)^{l-1} + \cdots = -\sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} h_{\alpha\gamma} h_{\beta\gamma} \cdot (s-s_\mu)^{2l} + \cdots.$$

Nun kann Φ für reelle Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht verschwinden, ohne dass diese sämmtlich Null sind. Folglich ist der Coefficient von $(s-s_\mu)^{2l}$ auf der Rechten nicht Null; es muss also

$$2l \geqq l-1$$

oder

$$l \geqq -1$$

sein. Damit ist bewiesen, dass $f(s)_{\alpha\gamma}$ durch $(s-s_\mu)^{\lambda-1}$ theilbar sein muss, wenn $f(s)$ den Factor $(s-s_\mu)^\lambda$ hat; woraus die Richtigkeit der Formel (21.) unmittelbar folgt.

Nach bekannten Sätzen ist ferner, wenn auch $\alpha', \alpha'', \ldots, \beta', \beta'', \ldots$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ bezeichnen, die Determinante

$$\begin{vmatrix} f(s)_{\alpha\beta} & f(s)_{\alpha\beta'} \\ f(s)_{\alpha'\beta} & f(s)_{\alpha'\beta'} \end{vmatrix} \text{ durch } f(s),$$

$$\begin{vmatrix} f(s)_{\alpha\beta} & f(s)_{\alpha\beta'} & f(s)_{\alpha\beta''} \\ f(s)_{\alpha'\beta} & f(s)_{\alpha'\beta'} & f(s)_{\alpha'\beta''} \\ f(s)_{\alpha''\beta} & f(s)_{\alpha''\beta'} & f(s)_{\alpha''\beta''} \end{vmatrix} \text{ durch } f^2(s)$$

theilbar, u. s. f. Hieraus lässt sich mit Hülfe des eben Bewiesenen leicht folgern, dass von den partiellen Determinanten des Systems

$$\begin{matrix} f_{11}^{(\mu)} & f_{12}^{(\mu)} & \cdots & f_{1n}^{(\mu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}^{(\mu)} & f_{n2}^{(\mu)} & \cdots & f_{nn}^{(\mu)} \end{matrix}$$

alle verschwinden, deren Grad λ übertrifft. Dies bedeutet aber, da nach Formel (10.)

$$\vartheta_\mu = \sum_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^{(\mu)} \Phi_\alpha \Phi_\beta \tag{25.}$$

ist, dass sich ϑ_μ durch λ lineare Functionen von $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_n$ oder $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausdrücken lässt. Man kann daher ϑ_μ namentlich auch in der Form

$$\vartheta_\mu = k_1 z_1^2 + \cdots + k_\lambda z_\lambda^2$$

darstellen, wo $z_1, \ldots z_\lambda$ lineare homogene Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten, deren Coefficienten ebenso wie $k_1, \ldots k_\lambda$ sämmtlich reell sind. Da ferner die Anzahl der Functionen z, die in allen ϑ vorkommen, n beträgt, so müssen dieselben unabhängig von einander sein; man kann sie also durch reelle Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sämmtlich zu Null machen, bis auf eine, und dieser einen beliebigen Werth geben; woraus folgt, dass die Coefficienten k sämmtlich positiv oder negativ sein werden, je nachdem Φ eine beständig positiv oder beständig negativ bleibende Function ist.

So ist nun das folgende Theorem begründet.

Es seien Φ, Ψ homogene ganze Functionen zweiten Grades von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit reellen Coefficienten, und die erstere überdies so beschaffen, dass sie für reelle Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ stets dasselbe Zeichen behält und nur Null wird, wenn diese Grössen sämmtlich verschwinden. Die Determinante der Function

$$s\Phi - \Psi$$

ist dann eine ganze Function n^{ten} Grades der willkürlichen Grösse

s, welche nur für eine Anzahl reeller Werthe der letzteren Null wird. Sind diese $s_1, s_2, \ldots s_m$, und daher die Determinante, abgesehen von einem s nicht enthaltenden Factor, gleich

$$(s-s_1)^{\lambda_1}(s-s_2)^{\lambda_2}\ldots(s-s_m)^{\lambda_m},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summe n ist; so giebt es ebenso viele völlig bestimmte homogene Functionen zweiten Grades $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_m$ von $x_1, x_2, \ldots x_n$, durch welche sich Φ, Ψ in der Form

$$\Phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_m$$
$$\Psi = s_1\vartheta_1 + s_2\vartheta_2 + \cdots + s_m\vartheta_m$$

ausdrücken lassen, während ϑ_μ oder $-\vartheta_u$, je nachdem Φ stets positiv oder stets negativ bleibt, als Summe der Quadrate von λ_μ reellen linearen Functionen der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ dargestellt werden kann, und zwar, wenn $\lambda_\mu > 1$ ist, auf unendlich viele Arten.

5.

Die im Vorstehenden entwickelte Eigenschaft der Functionen $f(s)_{\alpha\beta}$, auf welcher bei der vorausgesetzten Beschaffenheit von Φ, Ψ die Darstellbarkeit der letzteren in der besprochenen Form beruht, benutze ich, um bei dieser Gelegenheit einen Irrtum zu berichtigen, der sich in der Lagrange'schen Theorie der kleinen Schwingungen (Mécanique analytique, II, sect. VI), sowie in allen spätern mir bekannten Darstellungen derselben, findet. Lagrange führt die Aufgabe, um die es sich handelt, auf ein System linearer Differentialgleichungen zurück, das mit dem folgenden übereinstimmt, in welchem $\Phi, \Psi, \Phi_\alpha, \Psi_\alpha$ dieselbe Bedeutung haben wie in der vorhergehenden No., Φ eine stets positiv bleibende Function ist, die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ aber als Functionen der Zeit t betrachtet werden:

$$(1.) \qquad \frac{d^2\Phi_1}{dt^2} = \Psi_1, \quad \frac{d^2\Phi_2}{dt^2} = \Psi_2, \quad \ldots \quad \frac{d^2\Phi_n}{dt^2} = \Psi_n.$$

Die Integration dieser Gleichungen hängt von den Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ ab. Nachdem Lagrange die Form der Integrale angegeben und gezeigt hat, wie die willkürlichen Constanten derselben durch die Anfangs-

werthe von x_1, $\frac{dx_1}{dt}$, u. s. w. bestimmt werden, führt er unter den Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit x_1, $\frac{dx_1}{dt}$ u. s. w. stets unendlich klein bleiben, wenn sie es ursprünglich sind, auch die an, dass die genannte Gleichung keine gleiche Wurzeln haben dürfe, weil sonst in den Integralen Glieder vorkommen würden, die mit der Zeit beliebig gross werden könnten. Dieselbe Behauptung findet sich bei Laplace wiederholt, da wo er in der Mécanique céleste die Säcular-Störungen der Planeten behandelt, und ebenso, so viel mir bekannt ist, bei allen übrigen diesen Gegenstand behandelnden Autoren, wenn sie überhaupt den Fall der gleichen Wurzeln erwähnen, was z. B. bei Poisson nicht geschieht. Aber sie ist nicht begründet. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man sich nur an den Dirichlet'schen Beweis des Fundamentalsatzes dieser Theorie zu erinnern. (Über die Stabilität des Gleichgewichts, Crelle's Journal Bd. 32.) Hiernach genügt es, damit x_1, x_2, ... x_n so wie $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... $\frac{dx_n}{dt}$ die angegebene Eigenschaft haben, vollständig, wenn nur die Function Ψ stets negativ bleibt, und ihre Determinante nicht Null ist, was stattfinden kann, ohne dass die Wurzeln der Gleichung $f(s) = 0$ alle von einander verschieden sind; wie man denn auch wirklich besondere Fälle der obigen Gleichungen, bei denen diese Bedingung nicht erfüllt ist, mehrfach behandelt und doch keine Glieder von der angegebenen Beschaffenheit gefunden hat.

Die irrige Ansicht Lagrange's rührt aber daher, dass er bei den mit (1.) bezeichneten Gleichungen nichts Anderes berücksichtigt, als dass sie lineare und mit constanten Coefficienten versehene Differentialgleichungen sind. In der That würden, wenn man den Coefficienten von Φ willkürliche Werthe beilegte, und die Gleichung $f(s) = 0$ hätte eine λfache Wurzel, die jetzt mit $(-r)$ bezeichnet werden möge, in den Ausdrücken von x_1, x_2 u. s. w. im allgemeinen Glieder vorkommen von der Form

$$F(t)\cos(\sqrt{r}.t) + F_1(t)\sin(\sqrt{r}.t),$$

wo $F(t)$, $F_1(t)$ ganze Functionen $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grades von t bedeuten sollen; und es ist nicht ohne Weiteres ersichtlich, auf welche Weise sich $F(t)$, $F_1(t)$ auf Constanten reduciren, wie es aus den angegebenen Gründen nothwendig geschieht, wenn Φ, Ψ die vorausgesetzte Beschaffenheit haben, ohne dass sonst unter ihren Coefficienten noch besondere Relationen bestehen.

Diese Schwierigkeit lässt sich nun aber auf folgende Weise beseitigen.

Wenn man alle Voraussetzungen und Bezeichnungen der vorigen No. beibehält, s aber durch ρ^2 und $s_1, s_2, \ldots s_m$, die bei der angenommenen Beschaffenheit von Ψ alle negativ sind, durch $-\rho_1^2, -\rho_2^2, \ldots -\rho_m^2$ ersetzt, mit $\chi(t)_{\alpha\beta}$ die Function

$$\left[\frac{f(\rho^2)_{\alpha\beta}}{f(\rho^2)}\, e^{\rho t}\right]_{\rho^{-1}},$$

und mit p_α, q_α die Werthe von Φ_α und $\frac{d\Phi_\alpha}{dt}$ zur Zeit t_0 bezeichnet; so ergiebt sich

$$x_\alpha = \sum_\beta \left(p_\beta \frac{d\chi(t-t_0)_{\alpha\beta}}{dt} + q_\beta \chi(t-t_0)_{\alpha\beta}\right). \tag{2.}$$

Dieser Ausdruck für x_α stimmt mit dem überein, welchen Cauchy mittelst seines Calcul des résidus hergeleitet hat; seine Richtigkeit kann aber auch ohne Schwierigkeit unmittelbar bewiesen werden. Zerlegt man nun

$$\frac{f(\rho^2)_{\alpha\beta}}{f(\rho^2)}$$

in Partial-Brüche, so erhält man (Formel 21)

$$\frac{f(\rho^2)_{\alpha\beta}}{f(\rho^2)} = \frac{f^{(1)}_{\alpha\beta}}{\rho^2+\rho_1^2} + \frac{f^{(2)}_{\alpha\beta}}{\rho^2+\rho_2^2} + \cdots + \frac{f^{(m)}_{\alpha\beta}}{\rho^2+\rho_m^2},$$

und hieraus

$$\left\{\begin{aligned} \chi(t)_{\alpha\beta} &= f^{(1)}_{\alpha\beta}\frac{\sin\rho_1 t}{\rho_1} + f^{(2)}_{\alpha\beta}\frac{\sin\rho_2 t}{\rho_2} + \cdots + f^{(m)}_{\alpha\beta}\frac{\sin\rho_m t}{\rho_m} \\ \frac{d\chi(t)_{\alpha\beta}}{dt} &= f^{(1)}_{\alpha\beta}\cos\rho_1 t + f^{(2)}_{\alpha\beta}\cos\rho_2 t + \cdots + f^{(m)}_{\alpha\beta}\cos\rho_m t. \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

Man sieht, in welch engem Zusammenhange die Integration der betrachteten Differentialgleichungen mit den Entwicklungen steht, die zu der behandelten Transformation der Functionen Φ, Ψ geführt haben.

Die vorstehenden Formeln gelten auch in dem Falle, wo bloss Φ eine beständig positiv bleibende Function ist, während die Coefficienten von Ψ beliebige (reelle) Werthe haben. Die Grössen $\rho_1, \rho_2, \ldots$ können dann aber zum Theil oder alle imaginär werden, jedoch ohne reellen Theil, so dass $\frac{\sin\rho_1 t}{\rho_1}$, $\cos\rho_1 t$ u. s. w. stets reell sind.

Beiläufig will ich noch bemerken, dass man, wenn an die Stelle der obigen Differentialgleichungen die folgenden treten:

$$\frac{d^2\Phi_1}{dt^2} = \Psi_1 + F_1(t), \quad \frac{d^2\Phi_2}{dt^2} = \Psi_2 + F_2(t), \quad \ldots \quad \frac{d^2\Phi_n}{dt^2} = \Psi_n + F_n(t),$$

wo $F_1(t), F_2(t), \ldots F_n(t)$ Functionen von t sind, die $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthalten,

$$(4.) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_\alpha = \sum\limits_\beta \left(p_\beta \dfrac{d\chi(t-t_0)_{\alpha\beta}}{dt} + q_\beta \chi(t-t_0)_{\alpha\beta} \right) + \sum\limits_\beta \int_{t_0}^{t_1} \chi(t-\tau)_{\alpha\beta} F_\beta(\tau)\, d\tau \\ \dfrac{dx_\alpha}{dt} = \dfrac{d}{dt} \sum\limits_\beta \left(p_\beta \dfrac{d\chi(t-t_0)_{\alpha\beta}}{dt} + q_\beta \chi(t-t_0)_{\alpha\beta} \right) + \sum\limits_\beta \int_{t_0}^{t_1} \dfrac{d\chi(t-\tau)_{\alpha\beta}}{dt} F_\beta(\tau)\, d\tau \end{array} \right.$$

erhält.

NEUER BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES DER ALGEBRA.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 12. December 1859.)

1.

Man betrachte zuerst eine ganze Function $f(x)$ von der Form

$$x - a_0 - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \cdots - a_\varrho x^\varrho$$

und bilde,

$$a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_\varrho x^\varrho \text{ mit } \varphi(x)$$

bezeichnend, eine unbegrenzte Reihe von Ausdrücken $x_0, x_1, x_2, \ldots$ mittelst der Formeln:

$$(1.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = \varphi(x_0) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

Diese Ausdrücke werden dann sämmtlich ganze rationale Functionen der Grössen $a_0, a_2, a_3, \ldots$ mit ganzzahligen und positiven Coefficienten, und es lässt sich zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen, wenn n ohne Ende wächst, x_n einer bestimmten Grenze sich nähert, welche für x gesetzt die Gleichung $f(x) = 0$ befriedigt.

Man hat, wenn x' eine willkürliche Grösse bezeichnet,

$$(2.) \qquad \begin{aligned} \varphi(x') - \varphi(x) &= (x' - x)\{a_2(x + x') + a_3(x^2 + xx' + x'^2) + \cdots\} \\ &= (x' - x)\,\varphi(x, x'), \end{aligned}$$

so dass $\varphi(x, x')$ eine ganze Function von x, x', a_2, a_3, ... ist. Dann folgt aus (1.)

$$(3.)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& a_0 \\ x_2 - x_1 &=& x_1\varphi(0, x_1) \\ x_3 - x_2 &=& (x_2 - x_1)\varphi(x_1, x_2) \\ x_4 - x_3 &=& (x_3 - x_2)\varphi(x_2, x_3) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ x_n - x_{n-1} &=& (x_{n-1} - x_{n-2})\varphi(x_{n-2}, x_{n-1}), \end{array}\right.$$

oder, wenn man

$$\varphi(0, x_1) = \psi_1, \quad \varphi(x_1, x_2) = \psi_2, \quad \ldots \quad \varphi(x_{n-2}, x_{n-1}) = \psi_{n-1}$$

setzt,

$$(4.)\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& a_0 \\ x_2 - x_1 &=& x_1\psi_1 = a_0\psi_1 \\ x_3 - x_2 &=& (x_2 - x_1)\psi_2 = a_0\psi_1\psi_2 \\ x_4 - x_3 &=& (x_3 - x_2)\psi_3 = a_0\psi_1\psi_2\psi_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \\ x_n - x_{n-1} &=& (x_{n-1} - x_{n-2})\psi_{n-1} = a_0\psi_1\psi_2\cdots\psi_{n-1}, \end{array}\right.$$

und hieraus

$$(5.)\qquad x_n = a_0\{1 + \psi_1 + \psi_1\psi_2 + \psi_1\psi_2\psi_3 + \cdots + \psi_1\psi_2\cdots\psi_{n-1}\},$$

sowie, wenn $m < n$,

$$(6.)\qquad x_n - x_m = a_0\{\psi_1\cdots\psi_m + \psi_1\cdots\psi_{m+1} + \cdots + \psi_1\cdots\psi_{n-1}\}.$$

Die Ausdrücke $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sind ebenfalls ganze Functionen von $a_0, a_2, a_3, \ldots$ mit positiven Coefficienten. Es wird daher der absolute Betrag von ψ_μ jedenfalls nicht grösser sein als der des Ausdrucks, den man erhält, wenn man in ψ_μ an Stelle jeder der Grössen $a_0, a_2, \ldots$ deren absoluten Betrag setzt. Es werde deswegen zunächst der Fall betrachtet, wo $a_0, a_2, a_3, \ldots$ alle positiv sind. Bei dieser Annahme sind auch $x_1, x_2, \ldots x_n$, $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ sämmtlich positiv, und man hat

$$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\mu-1}, x_\mu) &= a_2(x_\mu + x_{\mu-1}) + a_3(x_{\mu-1}^2 + x_{\mu-1}x_\mu + x_\mu^2) + \cdots \\ &< 2a_2x_\mu + 3a_3x_\mu^2 + \cdots, \end{aligned}$$

oder

$$\psi_\mu < \varphi'(x_\mu).$$

Legt man nun den $a_2, a_3, \ldots$ bestimmte Werthe bei und nimmt eine beliebige

positive Grösse ξ, die >1 ist, an, so wird für alle Werthe von a_0, die eine gewisse Grenze nicht übersteigen,

$$\varphi'(a_0\xi) = 2a_0a_2\xi + 3a_0^2a_2\xi^2 + \cdots < 1,$$

und zugleich

$$\frac{1}{f'(a_0\xi)} = \frac{1}{1-2a_0a_2\xi-\cdots} < \xi$$

sein. Für jeden solchen Werth a_0 lässt sich dann zeigen, dass

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \text{ sämmtlich } < a_0\xi$$

und

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \text{ sämmtlich } < 1-f'(a_0\xi)$$

sind. Denn angenommen, es sei das Erstere bewiesen für $x_1, x_2, \ldots x_m$ — wie es denn für x_1 unmittelbar klar ist — so gilt das zweite, da

$$\psi_\mu < \varphi'(x_\mu) \text{ und } \varphi'(x_{\mu-1}) < \varphi'(a_0\xi) = 1-f'(a_0\xi)$$

ist, auch für $\psi_1, \ldots \psi_m$. Dann ist aber

$$1+\psi_1+\psi_1\psi_2+\cdots+\psi_1\psi_2\ldots\psi_m < 1+\varphi'(a_0\xi)+\varphi'(a_0\xi)^2+\cdots+\varphi'(a_0\xi)^m$$
$$< \frac{1}{1-\varphi'(a_0\xi)} = \frac{1}{f'(a_0\xi)} < \xi,$$

also

$$x_{m+1} < a_0\xi.$$

Hiermit ist die Richtigkeit der ersteren Behauptung für alle Grössen $x_1, x_2, \ldots$ bewiesen, und somit auch die der zweiten für alle $\psi_1, \psi_2, \ldots$.

Wenn man jetzt, $a_0, a_2, \ldots$ wieder als beliebige Grössen annehmend, festsetzt, es sollen die absoluten Beträge derselben kleiner sein als bestimmte positive Grössen $\alpha_0, \alpha_2, \ldots$, welche der Bedingung genügen, dass man für irgend einen positiven Werth von ξ, der >1 ist,

$$2\alpha_2\alpha_0\xi + 3\alpha_3\alpha_0^2\xi^2 + \cdots < 1$$
$$\frac{1}{1-2\alpha_2\alpha_0\xi-3\alpha_3\alpha_0^2\xi^2-\cdots} < \xi$$

hat — was sich bei beliebiger Annahme von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ stets dadurch erreichen lässt, dass α_0 klein genug genommen wird — so werden nach dem vorher Bemerkten

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots,$$

wie weit man diese Reihe auch fortsetzen mag, ihren absoluten Beträgen nach sämmtlich um eine angebbare Grösse kleiner als 1 sein.

Angenommen nun, es haben $a_0, a_2, \ldots$ solche Werthe, und es sei der absolute Betrag von ψ_μ beständig kleiner als eine zwischen 0 und 1 liegende Grösse ε, sobald μ einen bestimmten Werth m überschreitet. Dann ist, wenn $\nu > \mu > m$,

$$x_\nu - x_\mu = a_0\{\psi_1 \ldots \psi_\mu + \psi_1 \ldots \psi_{\mu+1} + \cdots + \psi_1 \ldots \psi_\nu\},$$

und der absolute Betrag von $\frac{x_\nu - x_\mu}{a_0}$ kleiner als $\varepsilon^\mu + \varepsilon^{\mu+1} + \cdots + \varepsilon^\nu < \frac{\varepsilon^\mu}{1-\varepsilon}$. Folglich kann man μ so gross annehmen, dass

$$x_\nu - x_\mu$$

für jeden Werth von ν, der $> \mu$, kleiner ist als jede beliebig angenommene noch so kleine Grösse. Daraus folgt, dass sich x_μ, wenn μ ohne Ende wächst, einer bestimmten Grenze nähert. Diese werde mit $\bar{x}$ bezeichnet, dann wird die Differenz

$$f(\bar{x}) - f(x_\mu)$$

unendlich klein, wenn μ unendlich gross wird. Aber

$$f(x_\mu) = x_\mu - \varphi(x_\mu) = x_\mu - x_{\mu+1},$$

folglich muss, da $x_\mu - x_{\mu+1}$ der Grenze Null sich nähert, wenn μ ohne Ende wächst,

$$f(\bar{x}) = 0$$

sein.

Die Grösse $\bar{x}$ ist durch die Werthe, die man $a_0, a_2, \ldots$ beilegt, völlig bestimmt. Man hat daher den Satz:

Es ist möglich, die Grössen $a_0, a_2, a_3, \ldots$ durch Feststellung von Grenzen für ihre absoluten Beträge, ohne sie irgend einer andern Beschränkung zu unterwerfen, so zu limitiren, dass es eine völlig bestimmte eindeutige Function derselben

$$\bar{x} = a_0(1 + \psi_1 + \psi_1\psi_2 + \cdots + \psi_1\psi_2 \ldots \psi_n + \cdots)$$

giebt, welche für x gesetzt die Gleichung

$$x - a_0 - a_2x^2 - a_3x^3 - \cdots = 0$$

befriedigt. Dabei ist es gestattet, die Grenzen für die absoluten Beträge von $a_2, a_3, \ldots$ willkürlich anzunehmen; es ist dann die Grenze, unter welcher der absolute Betrag von a_0 bleiben muss, eine völlig bestimmte.

Da die Ausdrücke $\psi_1, \psi_2, \ldots$, wie bemerkt, sämmtlich ganze Functionen von $a_0, a_2, \ldots$ mit positiven Coefficienten sind, so ist es erlaubt, aus der Gesammheit der Ausdrücke, aus denen die vorstehende Reihe für $\bar{x}$ zusammengesetzt ist, alle diejenigen Glieder, welche dieselbe Potenz von a_0 enthalten, herauszuheben und durch Addition in ein einziges Glied zu vereinigen, wodurch man für $\bar{x}$ einen Ausdruck von der Form

$$\bar{x} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu a_0^\nu$$

erhält, wo $B_1 = 1$ und jede der übrigen Grössen B_ν eine ganze Function von $a_2, a_3, \ldots a_\varrho$ mit lauter positiven Coefficienten ist. (Dabei ist zu bemerken, dass jede der Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots$ durch a_0 theilbar ist, also eine bestimmte Potenz von a_0 nur in einer endlichen Anzahl von Gliedern der für $\bar{x}$ gefundenen Reihe vorkommen kann.)

2.

Angenommen nun, es seien $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ irgend ϱ bestimmte Grössen, deren Wahl keiner anderen Beschränkung unterworfen ist als dass unter ihnen keine zwei gleiche vorkommen dürfen, und es werde

$$f_0(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_\varrho)$$

gesetzt. Ferner seien $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ vorläufig unbestimmte veränderliche Grössen, und es werde gesetzt

$$f(x) = f_0(x) + u_1 x^{\varrho-1} + u_2 x^{\varrho-2} + \cdots + u_\varrho.$$

Dann lässt sich folgendes erweisen. Man kann für die absoluten Beträge von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ obere Grenzen so festsetzen, dass für jedes der alsdann möglichen Werthsysteme $(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)$ die Gleichung

$$f(x) = 0$$

ϱ Wurzeln besitzt, von denen jede einer der Grössen $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ so nahe kommt wie man will.

Zu dem Ende setze man in $f(x)$

$$x = c_\lambda + v_\lambda,$$

wo λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots \rho$ bezeichnet, so wird

$$f(x) = f_0'(c_\lambda) v_\lambda + \tfrac{1}{2} f_0''(c_\lambda) v_\lambda^2 + \cdots + v_\lambda^\varrho + U_{\lambda 0} + U_{\lambda 1} v_\lambda + U_{\lambda 2} v_\lambda^2 + \cdots + U_{\lambda, \varrho-1} v_\lambda^{\varrho-1},$$

wo $U_{\lambda 0}, U_{\lambda 1}, \dots U_{\lambda, \varrho-1}$ ganze lineare Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sind, und bringe die Gleichung $f(x) = 0$ auf die Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + w_{\lambda 2} v_\lambda^2 + \cdots + w_{\lambda \varrho} v_\lambda^\varrho,$$

wo

$$w_{\lambda 0} = -\frac{U_{\lambda 0}}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)}, \quad w_{\lambda 2} = -\frac{U_{\lambda 2} + \frac{1}{2} f_0''(c_\lambda)}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)}, \quad \dots \quad w_{\lambda \varrho} = -\frac{\frac{1}{\varrho!} f_0^{(\varrho)}(c_\lambda)}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)},$$
$$= -\frac{1}{U_{\lambda 1} + f_0'(c_\lambda)}.$$

Man kann dann für die absoluten Beträge der Grössen $u_1, \dots u_\varrho$ obere Grenzen so festsetzen, dass für die dann möglichen Werthsysteme $(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ jede der Grössen $w_{\lambda 0}, w_{\lambda 2}, \dots w_{\lambda \varrho}$ ihrem absoluten Betrage nach eine angebbare Grenze nicht übersteigt und zugleich die vorstehende Gleichung mittelst des im Vorhergehenden auseinandergesetzten Verfahrens durch einen Werth von v_λ befriedigt werden kann, der die Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + W_{\lambda 2} w_{\lambda 0}^2 + W_{\lambda 3} w_{\lambda 0}^3 \dots$$

hat, wo $W_{\lambda 2}, W_{\lambda 3}, \dots$ ganze rationale Functionen von $w_{\lambda 1}, w_{\lambda 2}, \dots w_{\lambda \varrho}$ sind. So erhält man ρ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, welche eindeutige Functionen der Variabelen $u_1, \dots u_\varrho$ sind. Man sieht zugleich, dass keine zwei derselben einander gleich sind, wenn man die oberen Grenzen für die absoluten Beträge der Variablen $u_1, \dots u_\varrho$ hinlänglich klein annimmt.

Man kann ferner die Grenzen für die absoluten Beträge der Grössen $u_1, \dots u_\varrho$ so festsetzen, dass (für $\lambda = 1, 2, \dots \rho$)

$$|U_{\lambda 1}| < |f_0'(c_\lambda)|$$

ist. Dann lassen sich die Grössen $w_{\lambda 0}, w_{\lambda 2}, w_{\lambda 3}, \dots w_{\lambda \varrho}$, und somit auch die Grösse v_λ in Potenzreihen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ entwickeln. Es ergiebt sich also das Resultat:

Wenn eine ganze Function

$$f_0(x) = x^\varrho + C_1 x^{\varrho-1} + \cdots + C_\varrho$$

für ϱ von einander verschiedene Werthe $(c_1, c_2, \ldots c_\varrho)$ der Grösse x verschwindet, so hat auch die Gleichung

$$f(x) = x^\varrho + (C_1 + u_1) x^{\varrho-1} + \cdots + (C_\varrho + u_\varrho) = 0,$$

für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots u_\varrho = 0)$ angehörenden Werthsysteme $(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)$ ϱ ebenfalls von einander verschiedene Wurzeln. Diese lassen sich in der Form von Potenzreihen der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ darstellen und gehen, wenn die letzteren sämmtlich verschwinden, in $c_1, c_2, \ldots c_\varrho$ über.

3.

Jetzt seien $A_1, \ldots A_\varrho$ irgend welche gegebene Grössen, die keiner andern Bedingung unterworfen sind, als dass die Function

$$f(x) = x^\varrho + A_1 x^{\varrho-1} + \cdots + A_\varrho$$

mit ihrer ersten Derivirten $f'(x)$ keinen gemeinsamen Theiler haben, also ihre Discriminante nicht gleich Null sein darf. Wenn man dann wieder, wie vorhin, ϱ von einander verschiedene Grössen

$$c_1, c_2, \ldots c_\varrho$$

beliebig annimmt und

$$f_0(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_\varrho) = x^\varrho + C_1 x^{\varrho-1} + \cdots + C_\varrho$$

setzt, so lassen sich auf mannigfaltige Weise ϱ rationale Functionen

$$g_1(t), g_2(t), \ldots g_\varrho(t)$$

einer Veränderlichen t, der im Folgenden ausschliesslich reelle, dem Intervalle $(0, \ldots 1)$ angehörige Werthe beigelegt werden sollen, so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} g_1(0) &= C_1, \quad g_2(0) = C_2, \quad \ldots \quad g_\varrho(0) = C_\varrho; \\ g_1(1) &= A_1, \quad g_2(1) = A_2, \quad \ldots \quad g_\varrho(1) = A_\varrho \end{aligned}$$

wird und zugleich, wenn man

$$f(x,t) = x^\varrho + g_1(t) x^{\varrho-1} + \cdots + g_\varrho(t)$$

setzt, $f(x, t)$ und $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$, als Functionen von x betrachtet, für keinen dem Intervalle $(0, \ldots 1)$ angehörigen Werth von t einen gemeinsamen Theiler haben. Dies kann z. B. folgendermassen geschehen. Da die Discriminante der Function $f(x, 0)$ der Annahme nach einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist, wenn man unter z eine von x unabhängige willkürliche Grösse versteht,

$$(1-z)f(x, 0)+zf(x, 1)$$

eine Function von x, deren Discriminante nicht identisch, sondern nur für eine endliche Anzahl von Werthen des Parameters z verschwindet. Setzt man also, unter k eine reelle Constante verstehend,

$$z = \frac{(1+ki)t}{1+kit},$$

so kann man k stets so annehmen, dass die genannte Discriminante für keinen dem Intervalle $(0, \ldots 1)$ angehörigen Werth von t verschwindet. Nimmt man dann

$$g_\nu(t) = \frac{(1-t)C_\nu+(1+ki)tA_\nu}{1+kit}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \rho)$$

so hat die Function

$$f(x, t) = x^\varrho+g_1(t)x^{\varrho-1}+\cdots+g_\varrho(t)$$

die verlangte Beschaffenheit. Nach dem Vorhergehenden hat nun die Gleichung

$$f(x, t) = 0$$

ρ Wurzeln, wenn die Grösse t so klein angenommen wird, dass die absoluten Beträge der Differenzen

$$g_1(t)-C_1, \quad g_2(t)-C_2, \quad \ldots \quad g_\varrho(t)-C_\varrho$$

unter einer gewissen Grenze liegen. Angenommen nun, es stehe fest, dass die Gleichung $f(x, t) = 0$ ρ von einander verschiedene Wurzeln habe, für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag kleiner ist als ein bestimmter Werth t_0, so lässt sich zeigen, dass dieselbe Beschaffenheit der Gleichung auch noch zukommt für alle Werthe von t in einem Intervalle $(0, \ldots t_1)$, dessen obere Grenze t_1 grösser als t_0 ist.

Es sei t' irgend ein bestimmter Werth von t, der kleiner als t_0 ist, und es habe die Gleichung $f(x, t') = 0$ die Wurzeln $c_1', \ldots c_\varrho'$. Setzt man dann,

unter τ eine positive reelle Grösse verstehend,

$$t = t' + \tau, \qquad x = c'_\lambda + v_\lambda,$$

so kann man die Gleichung $f(x, t' + \tau) = 0$ nach § 2, wenn man $f(x, t')$ an die Stelle der dort mit $f_0(x)$ bezeichneten Function treten lässt, auf die Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + w_{\lambda 2} v_\lambda^2 + \cdots + w_{\lambda \varrho} v_\lambda^\varrho$$

bringen, wo

$$w_{\lambda 0} = -\frac{U_{\lambda 0}}{U_{\lambda 1} + f'(c'_\lambda, t')}, \quad w_{\lambda 2} = -\frac{U_{\lambda 2} + \frac{1}{2} f''(c'_\lambda, t')}{U_{\lambda 1} + f'(c'_\lambda, t')}, \quad \cdots \quad w_{\lambda \varrho} = -\frac{\frac{1}{\varrho!} f^{(\varrho)}(c'_\lambda, t')}{U_{\lambda 1} + f'(c'_\lambda, t')}$$

und $U_{\lambda 0}, U_{\lambda 1}, \ldots U_{\lambda \varrho}$ ganze rationale Functionen von τ sind, die für $\tau = 0$ sämmtlich verschwinden. Da nun keine der Grössen $f'(c'_\lambda, t')$ gleich Null ist, so erhält man durch das in § 1 auseinandergesetzte Verfahren für jeden unterhalb einer gewissen Grenze liegenden Werth von τ eine die vorstehende Gleichung befriedigende Grösse v_λ in der Form

$$v_\lambda = w_{\lambda 0} + W_{\lambda 2} w_{\lambda 0}^2 + W_{\lambda 3} w_{\lambda 0}^3 + \cdots,$$

wo $W_{\lambda 2}, W_{\lambda 3}, \ldots$ ganze Functionen von $w_{\lambda 2}, w_{\lambda 3}, \ldots$ sind.

Unter den in Betreff der Constante k und der Veränderlichen t' gemachten Voraussetzungen hat nun jede der Grössen

$$f'(c'_1, t'), f'(c'_2, t'), \ldots f'(c'_\varrho, t')$$

eine von Null verschiedene untere Grenze. Da ferner die Coefficienten von $U_{\lambda 0}, U_{\lambda 1}, \ldots U_{\lambda \varrho}$ continuirliche Functionen von t', τ sind, und $U_{\lambda 0}$ für $\tau = 0$ verschwindet, so lässt sich für den absoluten Betrag von τ eine Grenze $\bar{\tau}$ so bestimmen, dass für alle der Bedingung $\tau < \bar{\tau}$ genügenden Werthe von τ die Reihen, durch welche $v_1, v_2, \ldots v_\varrho$ ausgedrückt werden, sämmtlich convergiren, wozu nach § 1 nur erforderlich ist, dass die absoluten Beträge von $W_{\lambda 2}$, $W_{\lambda 3}, \ldots W_{\lambda \varrho}$ für jeden Werth von λ endliche Werthe haben und $|W_{\lambda 0}|$ hinlänglich klein angenommen wird. Nimmt man also t' so nahe bei t_0 an, dass $t_0 - t' < \bar{\tau}$ ist, so erhellt, dass die Gleichung $f(x, t) = 0$ auch dann noch ϱ von einander verschiedene Wurzeln hat, wenn t in dem Intervall $(t_0, \ldots t_0 + \bar{\tau})$ angenommen wird. Daraus folgt sofort, dass der Gleichung diese Eigenschaft zukommt für jeden dem Intervall $(0, \ldots 1)$ angehörenden Werth von t.

Da nun

$$f(x, 1) = f(x)$$

ist, so gilt also der Satz:

Jede Gleichung von der Form

$$x^\varrho + A_1 x^{\varrho-1} + \cdots + A_\varrho = 0,$$

in der $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ gegebene Grössen sind und deren Discriminante nicht gleich Null ist, hat ρ von einander verschiedene Wurzeln.

Diesen Satz kann man auch so ausdrücken: Die Function $f(x)$ lässt sich darstellen in der Form eines Productes aus n Factoren, welche ganze lineare Functionen derselben Veränderlichen x sind.

In dieser Form ausgesprochen, gilt der Satz auch noch, wenn die Discriminante von $f(x)$ gleich Null ist, denn in diesem Falle kann man mittelst eines bekannten Verfahrens $f(x)$ stets als ein Product mehrerer ganzen Functionen von x so darstellen, dass jeder einzelne Factor eine von Null verschiedene Discriminante hat.

ÜBER DIE GEODÄTISCHEN LINIEN AUF DEM DREIAXIGEN ELLIPSOID.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 31. October 1861.)

Der russische General Schubert hat in einer vor zwei Jahren erschienenen Abhandlung*) die Resultate der verschiedenen zur Bestimmung der Gestalt der Erde ausgeführten Gradmessungen auf's Neue mit einander verglichen, und ist zu dem Schlusse gekommen, dass die Erde als ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen betrachtet werden müsse. Diese Hypothese ist allerdings auch schon früher ausgesprochen, aber so viel ich weiss noch nicht durch eine darauf gegründete Rechnung geprüft worden. Schubert nimmt, wie man es immer gethan, die Meridiane als Ellipsen an, für welche die Umdrehungsaxe der Erde ein gemeinschaftlicher Durchmesser ist, und berechnet für jede einzelne, von der man grössere Bogen gemessen hat, aus den gefundenen Längen derselben die beiden Hauptaxen. Dabei ergeben sich für die grosse Axe bei den verschiedenen Meridianen Werthe, welche merklich von einander abweichen — und zwar nach Schubert's Ansicht zu stark, als dass man die Differenzen den Fehlern der Messungen allein zuschreiben dürfte —, aber ganz wohl mit einander harmoniren, wenn man annimmt, dass auch der Äquator eine Ellipse sei. Die unter dieser Voraussetzung durchgeführte Rechnung ergiebt dann die folgenden geodätischen Elemente:

Grösseste Axe der Erde	3272671,5 Toisen
Mittlere » » »	3272303,2 »
Kleinste » » »	3261467,8 »
Länge des einen Endpunkts der grössesten Axe . . .	58° 44′ (von Ferro).

*) Essai d'une détermination de la véritable figure de la Terre. St. Pétersbourg, 1859.

Ich halte mich nicht für berechtigt, in Betreff der Zuverlässigkeit dieser Resultate von Schubert's Arbeit ein Urtheil abzugeben,*) sondern habe sie nur angeführt, weil ich durch sie veranlasst worden bin, die Theorie der geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid wieder aufzunehmen und so weit auszubilden, dass sich auch für praktische Rechnungen brauchbare Methoden daraus ableiten lassen. Hierzu habe ich mich um so mehr aufgefordert gefühlt, als die hauptsächlichsten noch zu erledigenden Aufgaben mit Hülfe der Theorie der Abel'schen Functionen vollständig und einfach gelöst werden können.

Jede kürzeste Linie einer Fläche kann bekanntlich betrachtet werden als der Weg, den ein materieller Punkt durchläuft, welcher gezwungen ist, auf der Fläche zu bleiben, aber von keiner beschleunigenden Kraft getrieben wird. Die Coordinaten desselben zur Zeit t seien x, y, z, so sind dieselben eindeutige Functionen von t, zu deren Bestimmung man, wenn

$$F(x, y, z) = 0$$

die allen Punkten der Fläche gemeinsame Gleichung ist, die Differential-Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

hat. Für eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

ist, kann man also setzen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\varepsilon x}{\alpha}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varepsilon y}{\beta}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\varepsilon z}{\gamma},$$

wo ε eine noch unbekannte Function von t ist. Zur Integration dieser Differential-Gleichungen, welche zuerst von Jacobi vermittelst der ihm eigenthümlichen Methoden der analytischen Mechanik ausgeführt worden ist, bediene ich mich eines Verfahrens, welches den Vortheil hat, dass dabei keine

*) Erst nachdem diese Notiz bereits in der Akademie gelesen war, bin ich durch Herrn Encke auf eine spätere, mir nicht zu Gesicht gekommene Abhandlung Schubert's (in den Astron. Nachrichten, No. 1303) aufmerksam gemacht worden, in welcher er die Differenzen der verschiedenen Gradmessungen durch eine andere Hypothese auszugleichen versucht hat.

Transformation der vorgelegten Gleichungen erforderlich ist, und welches auch in andern Fällen Anwendung finden kann.

Es sei λ eine willkürliche von t unabhängige Grösse, und

$$f(\lambda) = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma),$$
$$\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)} = 1+\frac{x^2}{\lambda-\alpha}+\frac{y^2}{\lambda-\beta}+\frac{z^2}{\lambda-\gamma},$$
$$\frac{\varphi_1(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{\lambda-\alpha}+\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\lambda-\beta}+\frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{\lambda-\gamma},$$

so erhält man, wenn man in den Ausdrücken von

$$\frac{d^2\varphi(\lambda)}{dt^2}, \qquad \frac{d\varphi_1(\lambda)}{dt}$$

$\frac{\varepsilon x}{\alpha}, \frac{\varepsilon y}{\beta}, \frac{\varepsilon z}{\gamma}$ für $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ substituirt und dann ε eliminirt,

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\frac{d^2\varphi(\lambda)}{dt^2}-\varphi(\lambda)\frac{d\varphi_1(\lambda)}{dt}-\varphi_1(\lambda)\frac{d\varphi(\lambda)}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, dass

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2-\varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda)$$

von t unabhängig ist. Es ist aber dieser Ausdruck in Bezug auf λ eine ganze Function 5^{ten} Grades, welche für $\lambda = 0, \alpha, \beta, \gamma$ verschwindet. Folglich muss sein

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2-\varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda) = -c(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)\lambda(\lambda-\delta),$$

wo c, δ zwei Constanten sind, und zwar die erstere eine nothwendig positive Grösse. Setzt man in dieser Gleichung für $\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}$ den Ausdruck

$$f(\lambda)\left\{\frac{x\frac{dx}{dt}}{\lambda-\alpha}+\frac{y\frac{dy}{dt}}{\lambda-\beta}+\frac{z\frac{dz}{dt}}{\lambda-\gamma}\right\}$$

ein, so darf man, da die beiden Seiten der Gleichung in den correspondirenden Coefficienten übereinstimmen müssen, der Grösse λ jetzt auch solche Werthe geben, die von t abhängig sind. Wählt man als solche diejenigen beiden

λ_1, λ_2, welche ausser Null die Gleichung

$$\varphi(\lambda) = 0$$

befriedigen, und setzt

$$R(\lambda) = -\lambda(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\delta-\lambda),$$

so erhält man, nachdem noch die Formeln

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)_{\lambda=\lambda_1} = -\tfrac{1}{2}\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)\frac{d\lambda_1}{dt},$$
$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)_{\lambda=\lambda_2} = -\tfrac{1}{2}\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)\frac{d\lambda_2}{dt}$$

abgeleitet worden,

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\sqrt{c}}(\lambda_1-\lambda_2)\frac{d\lambda_1}{dt} = \sqrt{R(\lambda_1)}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\sqrt{c}}(\lambda_2-\lambda_1)\frac{d\lambda_2}{dt} = \sqrt{R(\lambda_2)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{c}.dt}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}},$$
$$\frac{\sqrt{c}.dt}{\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)} = \frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$

und somit

$$0 = \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$
$$\sqrt{c}.dt = \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2^2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}.$$

Dieses sind die von Jacobi gefundenen Gleichungen, genau in der Form, wie er sie in seinen Vorlesungen über Mechanik gegeben hat.

Die Grössen λ_1, λ_2 sind bekanntlich stets reell. Denn es ist

$$\varphi(\alpha) = \quad (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma).x^2,$$
$$\varphi(\beta) = -(\alpha-\beta)(\beta-\gamma).y^2,$$
$$\varphi(\gamma) = \quad (\alpha-\gamma)(\beta-\gamma).z^2$$

und es hat daher die Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$, wenn man $\alpha > \beta > \gamma$ annimmt, eine reelle Wurzel zwischen α und β, so wie eine andere zwischen β und γ, woraus folgt, dass auch die dritte reell ist.

Aus der Gleichung

$$\left(\frac{1}{2}\frac{d\varphi(\lambda)}{dt}\right)^2 - \varphi(\lambda)\varphi_1(\lambda) = cR(\lambda)$$

ergiebt sich ferner, wenn man auf beiden Seiten die Coefficienten von λ^5 und von λ bestimmt,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = c$$

und

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{dx^2}{\alpha}+\frac{dy^2}{\beta}+\frac{dz^2}{\gamma}\right) = \frac{c\delta\,dt^2}{\alpha\beta\gamma},$$

oder, wenn man die Länge des von einem bestimmten Augenblicke t_0 bis zu dem betrachteten zurückgelegten Weges mit s bezeichnet,

$$ds = \sqrt{c}.dt, \qquad s = \sqrt{c}.(t-t_0)$$

und

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)\left(\frac{dx^2}{\alpha}+\frac{dy^2}{\beta}+\frac{dz^2}{\gamma}\right) = \frac{\delta ds^2}{\alpha\beta\gamma}.$$

Aus diesen Gleichungen, von denen die letzte Joachimsthal gefunden und geometrisch interpretirt hat,*) ersieht man, dass die Constanten c, δ bestimmt sind, sobald man für irgend einen Augenblick den Ort des sich bewegenden Punktes und die Grösse und Richtung seiner Geschwindigkeit kennt. Dabei kann c jeden beliebigen positiven Werth erhalten; für die Grösse δ aber giebt es bei jeder Fläche bestimmte Grenzen, innerhalb welcher sie liegen muss. Setzt man nämlich $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, so ist aus dem vorstehenden Ausdrucke von $R(\lambda)$ ersichtlich, dass

$$R(\lambda_1) = -\lambda_1(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_1)(\gamma-\lambda_1)(\delta-\lambda_1)$$

und

$$R(\lambda_2) = -\lambda_2(\alpha-\lambda_2)(\beta-\lambda_2)(\gamma-\lambda_2)(\delta-\lambda_2)$$

beide positiv sein müssen. Nun ist aber, wenn man

$$\lambda_1 > \lambda_2$$

annimmt,

I. beim Ellipsoide

$$\alpha > \lambda_1 > \beta > \lambda_2 > \gamma > 0,$$

*) Crelle's Journal, Bd. 26, S. 168.

und es haben daher $\delta-\lambda_1$, $\delta-\lambda_2$ entgegengesetzte Zeichen, so dass δ zwischen λ_1 und λ_2 und somit

$$\delta \text{ stets zwischen } \alpha \text{ und } \gamma \text{ liegt.}$$

II. Eben so findet sich, dass beim zweischaligen Hyperboloide, wo

$$\alpha > 0 > \beta > \lambda_1 > \gamma > \lambda_2$$

ist, δ zwischen λ_1 und λ_2 und daher

$$\delta \text{ stets zwischen } \beta \text{ und } -\infty \text{ liegt.}$$

III. Beim einschaligen Hyperboloide endlich hat man

$$\alpha > \lambda_1 > \beta > 0 > \gamma > \lambda_2,$$

und es ist daher auch hier δ zwischen λ_1 und λ_2 und somit

$$\delta \text{ zwischen } \alpha \text{ und } -\infty$$

enthalten.

Zugleich lässt sich für jede Fläche nachweisen, dass δ jeden innerhalb der angegebenen Grenzen liegenden Werth auch wirklich annehmen kann.

Führt man nun in die obigen Differential-Gleichungen an die Stelle von t die Grösse s ein, so hat man

$$0 = \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$

$$ds = \frac{\lambda_1^2 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2^2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}$$

und

$$\frac{ds}{\lambda_1(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}}, \qquad \frac{ds}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)} = -\frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}} = -\frac{ds}{\lambda_1\lambda_2}$$

und daher, wenn man

$$u = -\int \frac{ds}{\lambda_1\lambda_2}$$

setzt, wo dann u eben so wie λ_1 und λ_2 eine völlig bestimmte eindeutige und continuirliche Function von s ist, wenn man dieser Grösse nur reelle Werthe

beilegt,

$$du = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$
$$0 = \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}} + \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}.$$

Vermöge dieser Gleichungen kann man nun λ_1, λ_2 auch als Functionen von u betrachten, und die Theorie der Abel'schen Transcendenten lehrt, dass jeder aus λ_1, $\sqrt{R(\lambda_1)}$ und λ_2, $\sqrt{R(\lambda_2)}$ symmetrisch zusammengesetzte rationale Ausdruck für alle endlichen Werthe von u den Charakter einer rationalen Function dieser Grösse besitzt. Insbesondere aber sind

$$\lambda_1\lambda_2, \quad (\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2), \quad (\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2), \quad (\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2), \quad (\delta-\lambda_1)(\delta-\lambda_2)$$

die Quadrate solcher Functionen, und man kann daher, da man

$$x^2 = \frac{\alpha(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \qquad y^2 = \frac{\beta(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}, \qquad z^2 = \frac{\gamma(\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

hat, die Coordinaten x, y, z selbst in der Form

$$x = \frac{F_1(u)}{F(u)}, \qquad y = \frac{F_2(u)}{F(u)}, \qquad z = \frac{F_3(u)}{F(u)}$$

darstellen, wo $F(u)$, $F_1(u)$, $F_2(u)$, $F_3(u)$ Functionen von u sind, die den Charakter ganzer rationaler Functionen haben und in beständig convergirende Reihen entwickelt werden können. Ferner ergiebt sich

$$s = \frac{F_4(u)}{F(u)},$$

wo $F_4(u)$ ebenso beschaffen ist wie die übrigen Functionen F. Auf diese Weise können x, y, z, s als Functionen einer Hülfsgrösse ausgedrückt werden, in der Art, dass, wenn man dieselbe alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ in stetiger Aufeinanderfolge durchlaufen lässt, man alle Punkte der betrachteten kürzesten Linie und die zugehörigen Werthe von s erhält.

Beim Ellipsoid sind nach dem Vorhergehenden drei Fälle zu unterscheiden, indem

$$\delta < \beta, \quad \delta > \beta \text{ und auch } \delta = \beta$$

sein kann. Für den ersten mögen hier die vollständig entwickelten Formeln mitgetheilt werden.

Man hat in diesem Falle

$$\alpha > \beta > \delta > \gamma > 0$$

und es liegt λ_1 zwischen α und β, λ_2 zwischen δ und γ. Setzt man daher

$$u = \int_\beta^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}} + \int_\gamma^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$u' = \int_\beta^{\lambda_1} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}} + \int_\gamma^{\lambda_2} \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

so ist u' eine Constante, $\frac{du}{ds} = -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}$, und beide Grössen sind reell. Ferner sei

$$A = \int_\gamma^\delta \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad A' = \int_\gamma^\delta \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$B = -\int_\beta^\alpha \frac{d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad B' = -\int_\beta^\alpha \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$C = \int_0^\gamma \frac{d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}}, \qquad C' = \int_0^\gamma \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}},$$

$$D = -\int_\delta^\beta \frac{d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}} + C, \qquad D' = -\int_\delta^\beta \frac{\lambda\, d\lambda}{2\sqrt{-R(\lambda)}} + C',$$

$$E = \int_\gamma^\delta \frac{\lambda^2 d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad F = -\int_\beta^\alpha \frac{\lambda^2 d\lambda}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

wo bei der Ausführung der Integrationen allen Wurzelgrössen ihr positiver Werth beizulegen ist.

Sodann sei

$$\vartheta(v, v') = \sum_{\nu, \nu'} \{ e^{-(av\nu + 2bv\nu' + cv'\nu')\pi} . \cos 2\pi(v\nu + v'\nu') \},$$

wo v, v' zwei unbeschränkt veränderliche Grössen bedeuten, a, b, c aber Constanten, welche der Bedingung unterworfen sind, dass

$$avv + 2bvv' + cv'v'$$

bei reellen Werthen von v, v' stets positiv bleiben muss, und ν, ν' ganze Zahlen, von denen jede, unabhängig von der andern, bei der Summation alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat. Ferner werde, wenn n, n'

zwei willkürliche von v, v' unabhängige Grössen bedeuten, die Function

$$e^{-[n(2v+nai+n'bi)+n'(2v'+nbi+n'ci)]\pi i}.\vartheta(v+nai+n'bi,\ v'+nbi+n'ci)$$

mit

$$\vartheta(v, v';\ n, n')$$

bezeichnet.

Alsdann hat man, wenn

$$a = \frac{CB'-BC'}{AB'-BA'}, \qquad b = \frac{DB'-BD'}{AB'-BA'} = \frac{AC'-CA'}{AB'-BA'}, \qquad c = \frac{AD'-DA'}{AB'-BA'},$$

$$v = \frac{1}{2}\frac{B'u-Bu'}{AB'-BA'}, \qquad v' = \frac{1}{2}\frac{Au'-A'u}{AB'-BA'}$$

gesetzt wird,

$$\sqrt[4]{\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha(\alpha-\delta)}}\cdot\frac{x}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\vartheta(v, v';\ 0, \frac{1}{2})}{\vartheta(v, v')},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{\beta(\beta-\delta)}}\cdot\frac{y}{\sqrt{\beta}} = \frac{\vartheta(v, v'-\frac{1}{2};\ 0, \frac{1}{2})}{\vartheta(v, v')},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\gamma(\delta-\gamma)}}\cdot\frac{z}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\vartheta(v-\frac{1}{2}, v'-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}, 0)}{\vartheta(v, v')}.$$

Ferner ergiebt sich bei passender Wahl des Punktes, in welchem s gleich Null ist,

$$s = 2Ev + 2Fv' + \frac{\partial \log \vartheta(v, v')}{\partial u'}.$$

Hierbei ist zu bemerken, dass man die Entwicklung der Function

$$\vartheta(v, v';\ n, n')$$

in dem Falle, dass $2n$, $2n'$ ganze Zahlen sind, wie in den vorstehenden Formeln, aus der für $\vartheta(v, v')$ gegebenen erhält, indem man $n+v$, $n'+v'$ für v, v' setzt.

Wenn die Grösse u stetig wachsend alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, so erhält λ_1 jeden zwischen α und β liegenden Werth, und λ_2 jeden zwischen δ und γ liegenden unzähligemal. Jedesmal, wenn $\lambda_2 = \delta$ wird, berührt die betrachtete Curve eine der Krümmungslinien des Ellipsoides, nämlich diejenige, in welcher dasselbe von dem confocalen einschaligen Hyperboloid, dessen grösseste Axe $\sqrt{\alpha-\delta}$ ist, geschnitten wird.

Wenn δ zwischen β und α liegt, so erfahren die gegebenen Ausdrücke nur leichte Modificationen. In dem besondern Falle, dass $\delta = \beta$ ist — wo es sich um kürzeste Linien handelt, die durch einen Nabelpunkt der Fläche gehen — verwandeln sich die vierfach periodischen Functionen in dreifach periodische. Dasselbe geschieht, wenn $\alpha = \beta$ oder $\beta = \gamma$; in jedem dieser drei Fälle werden x, y, z, s durch ϑ-Functionen eines Arguments und durch Exponential-Grössen ausgedrückt, und zwar in der Form, die sich zuerst in einer von Herrn Luther herausgegebenen hinterlassenen Abhandlung Jacobi's findet.*)

Für die übrigen Flächen zweiter Ordnung behalten die Formeln ganz dieselbe Gestalt, es treten nur statt der hier vorkommenden ϑ-Functionen andere auf, und die Constanten u', A, B u. s. w. werden durch Integrationen zwischen anderen Grenzen bestimmt.

Wenn $\alpha - \gamma$ eine kleine Grösse ist, wie dies bei dem Erdellipsoid eintritt, so lassen sich die in den Ausdrücken von x, y, z, s vorkommenden Quotienten auch in rasch convergirende Reihen von der Form

$$\sum A_{\nu,\nu'} \cos \pi(\nu v + \nu' v'), \qquad \sum B_{\nu,\nu'} \sin \pi(\nu v + \nu' v')$$

verwandeln; und ebenso ist es möglich, x, y, z durch Reihen von derselben Form, in denen aber v, v' lineare Functionen von s sind, darzustellen. Auf die Entwicklung dieser Reihen, wodurch man Formeln erhält, die bei geodätischen Rechnungen, mag man nun die Erde als ein dreiaxiges oder, wie bisher, als ein Rotations-Ellipsoid betrachten, auch als praktisch brauchbar sich erweisen dürften, kann ich indessen hier nicht eingehen.

*) Astron. Nachrichten Bd. 41, S. 210 und Journal für Mathematik Bd. 53, S. 335.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE INTEGRATION DER HYPERELLIPTISCHEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

(Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 17. Februar 1862.)

Nach dem Abel'schen Theorem lässt sich der Differential-Ausdruck

$$\frac{x_0^\alpha dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} + \frac{x_1^\alpha dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \cdots + \frac{x_\varrho^\alpha dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

in welchem $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ unbeschränkt veränderliche Grössen, $R(x_0)$ eine ganze Function $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ oder $(2\varrho+2)^{\text{ten}}$ Grades von x_0, $R(x_1)$ dieselbe Function von x_1 etc. bedeuten, für den Fall, dass α eine der Zahlen $0, 1, \ldots \varrho-1$ ist, auf die Form

$$\frac{\xi_1^\alpha d\xi_1}{\sqrt{R(\xi_1)}} + \cdots + \frac{\xi_\varrho^\alpha d\xi_\varrho}{\sqrt{R(\xi_\varrho)}}$$

bringen, wo $\xi_1, \ldots \xi_\varrho$ algebraische Functionen von $x_0, x_1, \ldots x_\varrho$ sind, und zwar für jeden Werth von α die Wurzeln ein und derselben Gleichung ϱ^{ten} Grades

$$\xi^\varrho + \varphi_1.\xi^{\varrho-1} + \cdots + \varphi_\varrho = 0,$$

deren Coefficienten $\varphi_1, \ldots \varphi_\varrho$ rational aus

$$x_0, \sqrt{R(x_0)}, \quad x_1, \sqrt{R(x_1)}, \quad \ldots \quad x_\varrho, \sqrt{R(x_\varrho)}$$

(und den Coefficienten von R) zusammengesetzt werden. Wenn man daher, mit $C_1, \ldots C_\varrho$ willkürliche Constanten bezeichnend, unter den Grössen $x_0, \ldots x_\varrho$ die ϱ Gleichungen

$$\varphi_1 = C_1, \ \ldots \ \varphi_\varrho = C_\varrho$$

annimmt, und dadurch die $\xi_1, \ldots \xi_\varrho$ von den genannten Veränderlichen unab-

hängig macht; so hat man die vollständigen Integrale der folgenden ϱ Differential-Gleichungen:

$$\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}}+\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\cdots+\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}=0,$$

$$\frac{x_0\,dx_0}{\sqrt{R(x_0)}}+\frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\cdots+\frac{x_\varrho\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{x_0^{\varrho-1}\,dx_0}{\sqrt{R(x_0)}}+\frac{x_1^{\varrho-1}\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\cdots+\frac{x_\varrho^{\varrho-1}\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}=0.$$

Die Zusammensetzung der Ausdrücke $\varphi_1, \ldots \varphi_\varrho$ ist ferner von der Art, dass sie sich nicht ändern, wenn irgend zwei der Grössen $x_0, \ldots x_\varrho$ und zugleich die zugehörigen Radicale unter einander vertauscht werden. Daraus folgt, dass sich aus den Gleichungen

$$\varphi_1 = C_1, \ldots \ \varphi_\varrho = C_\varrho$$

durch Wegschaffung der Wurzelgrössen eine gleiche Anzahl anderer

$$F_1 = 0, \ldots \ F_\varrho = 0$$

muss ableiten lassen, in denen die Ausdrücke auf der linken Seite rationale und symmetrische Functionen von $x_0, \ldots x_\varrho$ sind, und daher, wenn man mit u_1 die Summe der x bezeichnet, mit u_2 die Summe der Producte je zweier, mit u_3 die Summe der Produkte je dreier etc., rational aus $u_1, u_2, \ldots u_{\varrho+1}$ zusammengesetzt werden können. In der That hatte für $\varrho = 1$ bereits Euler gefunden, dass die Differential-Gleichung

$$\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}}+\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}=0$$

durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen $u_1 = x_0+x_1$ und $u_2 = x_0x_1$ integrirt werden könne; und Jacobi hat für jeden Werth von ϱ gezeigt,*) dass zwischen je zweien der Grössen u eine quadratische, und zwischen je dreien eine lineare Gleichung besteht. Zur Begründung dieses interessanten Resultats hat jedoch Jacobi die bis dahin bei der Integration der in Rede stehenden Differential-Gleichungen angewandten Methoden verlassen und durch

*) Crelle's Journal, Bd. 32.

eine neue ersetzen zu müssen geglaubt. Es dürfte indessen gut sein zu bemerken, dass das Abel'sche Theorem, so wie dasselbe auf die einfachste Weise zu den vorhin angegebenen Integralen der betrachteten Differential-Gleichungen führt, auch die rationalen Formen der ersten unmittelbar liefert.

Es sei $H(x,t)$ eine rationale Function von x, deren Coefficienten selbst beliebige Functionen einer andern, von x unabhängigen Veränderlichen t sind. Bezeichnet man dann mit $x_0, x_1, \ldots x_n$ die von t abhängigen Wurzeln der Gleichung

$$\sqrt{R(x)} = H(x,t),$$

so gelten, dem genannten Theorem gemäss, die ϱ Gleichungen, welche aus der folgenden

$$\sum_{(\nu=0,\ldots n)} \left\{ \frac{x_\nu^\alpha \, dx_\nu}{\sqrt{R(x_\nu)}} \right\} = 0$$

hervorgehen, wenn man $\alpha = 0, 1, \ldots \varrho - 1$ setzt, vorausgesetzt dass man der Wurzelgrösse $\sqrt{R(x_\nu)}$ von den beiden Werthen, die sie haben kann, den durch die Gleichung

$$\sqrt{R(x_\nu)} = H(x_\nu, t)$$

bestimmten beilegt. Giebt man insbesondere $H(x,t)$ die Form

$$M(x) + tN(x),$$

wo M, N ganze Functionen von x, deren Coefficienten von t unabhängig sind, bedeuten sollen, so kann man bewirken, dass die Gleichung

$$\sqrt{R(x)} = M(x) + tN(x)$$

genau $\varrho + 1$ von t abhängige Wurzeln erhält, und dass dieselben für einen bestimmten Werth von t, z. B. für $t = 0$, vorgeschriebene Werthe $c_0, c_1, \ldots c_\varrho$ annehmen, während zugleich die Zeichen der zugehörigen Radicale $\sqrt{R(c_0)}$, $\sqrt{R(c_1)}, \ldots \sqrt{R(c_\varrho)}$ beliebig fixirt werden können. Zu dem Ende nehme man für $M(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} Grades von x, die für $x = c_0, c_1, \ldots c_\varrho$ die Werthe $\sqrt{R(c_0)}, \sqrt{R(c_1)}, \ldots \sqrt{R(c_\varrho)}$ erhält, so dass

$$R(x) - M^2(x)$$

durch das Product

$$(x - c_0)(x - c_1) \ldots (x - c_\varrho),$$

welches mit $L(x)$ bezeichnet werde, theilbar wird; und

$$N(x) = \frac{R(x) - M^2(x)}{L(x)},$$

wo dann $N(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} oder $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, je nachdem $R(x)$ den Grad $2\varrho+1$ oder $2\varrho+2$ hat. Dann zerfällt die Gleichung

$$\sqrt{R(x)} = M(x) + tN(x),$$

welche rational gemacht die Form

$$R(x) - (M(x) + tN(x))^2 = 0$$

oder

$$(L(x) - 2tM(x) - t^2N(x))N(x) = 0$$

annimmt, in die beiden

$$N(x) = 0,$$
$$L(x) - 2tM(x) - t^2N(x) = 0,$$

und die letztere, welche vom $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grade ist, liefert die $\varrho+1$ von t abhängigen Grössen

$$x_0, x_1, \ldots x_\varrho,$$

welche den Differential-Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \frac{dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} &= 0, \\ \sum_\lambda \frac{x_\lambda dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} &= 0, \qquad (\lambda = 0, \ldots \varrho) \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \sum_\lambda \frac{x_\lambda^{\varrho-1} dx_\lambda}{\sqrt{R(x_\lambda)}} &= 0 \end{aligned}$$

genügen, wenn man die Zeichen der Radicale so bestimmt, wie es die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sqrt{R(x_0)} &= M(x_0) + tN(x_0), \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \sqrt{R(x_\varrho)} &= M(x_\varrho) + tN(x_\varrho) \end{aligned}$$

erfordern. Zugleich sieht man, dass für $t = 0$

$$x_0, x_1, \ldots x_\varrho, \sqrt{R(x_0)}, \sqrt{R(x_1)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$$

die festgesetzten Werthe erhalten.

Hiernach ergeben sich die allgemeinen Integrale der vorstehenden Differential-Gleichungen in rationaler Form, wenn man aus den $\varrho+1$ Gleichungen

$$L(x_0)-2tM(x_0)-t^2N(x_0) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L(x_\varrho)-2tM(x_\varrho)-t^2N(x_\varrho) = 0$$

ϱ andere durch Elimination von t ableitet. Dies kann auf mehrfache Weise ausgeführt werden.

Jacobi, der a. a. O. von der Gleichung

$$L(x)-2tM(x)-t^2N(x) = 0$$

ausgeht, in welcher er L, M, N als gegebene ganze Functionen $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades von x annimmt, und dann zeigt, dass die $\varrho+1$ Wurzeln der Gleichung, als Functionen der Veränderlichen t betrachtet, den in Rede stehenden Differential-Gleichungen genügen, wenn man

$$R(x) = L(x)N(x)+M^2(x)$$

setzt, verfährt dabei folgendermassen.

Es werde

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_\varrho) \text{ mit } F(x)$$

bezeichnet, so hat man, wenn N_0 der Coefficient von $x^{\varrho+1}$ in $N(x)$ ist, für jeden Werth von x

$$L(x)-2tM(x)-t^2N(x) = (1-N_0t^2)F(x).$$

Wird daher

$$F(x) = x^{\varrho+1}-u_1x^\varrho+u_2x^{\varrho-1}-\cdots\pm u_{\varrho-1}$$

gesetzt, so erhält man für jede der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_{\varrho-1}$ einen Ausdruck von der Form

$$\frac{l-2mt-nt^2}{1-N_0t^2},$$

in welchem l, m, n von t unabhängig sind. Daraus ergiebt sich unmittelbar der schon angeführte Satz, dass zwischen je zwei der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_{\varrho+1}$ eine quadratische, und zwischen je dreien eine lineare Gleichung besteht.

Man kann aber auch zu vollständig entwickelten einfachen Formeln in folgender Weise gelangen.

Es sei zunächst $R(x)$ vom $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grade. Dann ist $N_0 = 0$, und man hat

$$N(x)F(x) = R(x)-(M(x)+tN(x))^2.$$

Daraus folgt, wenn man diejenigen Werthe von x, für welche $R(x) = 0$ wird, mit $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$ bezeichnet,

$$N(a_\alpha)F(a_\alpha) = -(M(a_\alpha)+tN(a_\alpha))^2$$

für $\alpha = 1, \dots 2\varrho+1$. Aber

$$N(a_\alpha)L(a_\alpha) = -M^2(a_\alpha)$$

und daher

$$\frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} = \left(1-t\frac{M(a_\alpha)}{L(a_\alpha)}\right)^2.$$

Bezeichnet man also die von $x_0, \dots x_\varrho$ unabhängige Grösse

$$\frac{M(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} \text{ mit } h_\alpha$$

und setzt

$$p_\alpha = \frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} = \frac{(a_\alpha-x_0)(a_\alpha-x_1)\dots(a_\alpha-x_\varrho)}{(a_\alpha-c_0)(a_\alpha-c_1)\dots(a_\alpha-c_\varrho)},$$

so hat man, unter α, β, γ irgend drei der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho+1$ verstehend,

$$p_\alpha = (1-h_\alpha t)^2, \qquad p_\beta = (1-h_\beta t)^2, \qquad p_\gamma = (1-h_\gamma t)^2,$$

aus welchen Gleichungen sich durch Elimination von t die beiden folgenden ergeben:

$$(h_\beta^2(p_\alpha-1)-h_\alpha^2(p_\beta-1))^2-4h_\alpha h_\beta(h_\alpha-h_\beta)(h_\beta(p_\alpha-1)-h_\alpha(p_\beta-1)) = 0,$$
$$h_\beta h_\gamma(h_\beta-h_\gamma)(p_\alpha-1)+h_\gamma h_\alpha(h_\gamma-h_\alpha)(p_\beta-1)+h_\alpha h_\beta(h_\alpha-h_\beta)(p_\gamma-1) = 0.$$

Es besteht also auch zwischen je zweien der Grössen $p_1, \dots p_{2\varrho+1}$ eine quadratische, und zwischen je dreien eine lineare Gleichung. Wenn aber $R(x)$ vom $(2\varrho+2)^{\text{ten}}$ Grade ist, so hat man

$$(1-N_0t^2)N(x)F(x) = R(x)-(M(x)+tN(x))^2,$$

und daher, wenn man jetzt die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ mit $a_0, a_1, \dots a_{2\varrho+1}$ bezeichnet,

$$(1-N_0t^2)\frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} = \left(1-\frac{M(a_\alpha)}{L(a_\alpha)}t\right)^2 \qquad \text{für } \alpha = 0, \dots 2\varrho+1.$$

Nun setze man, unter α, β, γ wieder irgend drei der Zahlen 1, 2, ... $2\varrho+1$ verstehend,

$$p_\alpha = \frac{F(a_\alpha)}{L(a_\alpha)} : \frac{F(a_0)}{L(a_0)} = \frac{a_\alpha - x_0}{a_\alpha - c_0} \cdots \frac{a_\alpha - x_\varrho}{a_\alpha - c_\varrho} \cdot \frac{a_0 - c_0}{a_0 - x_0} \cdots \frac{a_0 - c_\varrho}{a_0 - x_\varrho},$$

so wird

$$p_\alpha = \left(\frac{1 - h_\alpha t}{1 - h_0 t}\right)^2$$

oder, wenn man

$$t' = \frac{t}{1 - h_0 t}$$

setzt,

$$p_\alpha = (1 - (h_\alpha - h_0) t')^2.$$

Daraus folgt, dass die vorstehenden Gleichungen zwischen $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ auch in dem jetzt betrachteten Falle gültig bleiben, wenn man nur $h_\alpha - h_0$, $h_\beta - h_0$, $h_\gamma - h_0$ für $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ setzt.

Es ist aber

$$\frac{M(x)}{L(x)} = \sum_{(\lambda = 0, \ldots \varrho)} \frac{\sqrt{R(c_\lambda)}}{(x - c_\lambda) L'(c_\lambda)},$$

wo $L'(x) = \frac{\partial L(x)}{\partial x}$, und daher

$$h_\alpha = \sum_\lambda \frac{\sqrt{R(c_\lambda)}}{(a_\alpha - c_\lambda) L'(c_\lambda)},$$

$$h_\alpha - h_0 = (a_0 - a_\alpha) \sum_\lambda \frac{\sqrt{R(c_\lambda)}}{(a_\alpha - c_\lambda)(a_0 - c_\lambda) L'(c_\lambda)}.$$

ZUR INTEGRATION DER LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT CONSTANTEN COEFFICIENTEN.

(Von Frau v. Kovalevsky 1884 veröffentlicht: Acta mathematica Bd. 6.)

Es seien u, v, w reelle, veränderliche Grössen, die wir als die Coordinaten eines Punktes im Raume in Beziehung auf drei in einem Punkte O unter rechten Winkeln sich schneidende Axen betrachten. Ferner sei σ irgend eine geschlossene Fläche von der Beschaffenheit, dass in jeder von O ausgehenden Richtung nur ein Punkt derselben liegt. Dann gehört zu jedem Punkte P des Raumes ein bestimmter Punkt P_1 der Fläche, nämlich derjenige, in welchem dieselbe von der Strecke OP oder deren Verlängerung über P hinaus geschnitten wird; und wenn man das Verhältniss OP zu OP_1 mit t bezeichnet, so ist t eine beständig positiv bleibende continuirliche Function der Coordinaten u, v, w von P, welche die Eigenschaft hat, dass sie in kt übergeht, wenn man u, v, w alle drei mit derselben positiven Zahl k multiplicirt. Der Ort aller Punkte ferner, für welche t denselben Werth hat, ist eine Fläche σ_t, welche σ ähnlich ist und von dieser ganz umschlossen wird, wofern $t<1$ ist, während das Umgekehrte stattfindet, wenn $t>1$. Setzt man nun

$$u' = \frac{\partial t}{\partial u}, \qquad v' = \frac{\partial t}{\partial v}, \qquad w' = \frac{\partial t}{\partial w},$$

so sind u', v', w' solche Functionen von u, v, w, die sich nicht ändern, wenn man diese Grössen alle drei mit k multiplicirt, und welche folgende geometrische Bedeutung haben. Man denke sich in dem Punkte u, v, w an die durch denselben gehende Fläche σ_t die Tangentialebene gelegt, so ist deren Gleichung, wenn man mit U, V, W die Coordinaten irgend eines ihrer

Punkte bezeichnet:

$$u'U+v'V+w'W=t.$$

Fällt man ferner von O aus auf diese Ebene ein Loth, so ist die Länge desselben

$$\frac{t}{\sqrt{u'u'+v'v'+w'w'}},$$

und die Coordinaten seines Fusspunktes sind

$$\frac{u't}{u'u'+v'v'+w'w'}, \quad \frac{v't}{u'u'+v'v'+w'w'}, \quad \frac{w't}{u'u'+v'v'+w'w'}.$$

Dieses vorausgesetzt, sei $F(u,v,w)$ eine Function von u, v, w, die sich überall stetig ändert, mit Ausnahme etwa in der Nähe des Punktes O, und es werde der Werth, den das Integral

$$\int\int\int F(u,v,w)\,du\,dv\,dw$$

erhält, wenn die Integration über alle diejenigen Punkte des Raumes ausgedehnt wird, die zwischen zweien Flächen σ_t und σ_{t_0} liegen, — wo wir jetzt t als eine unbeschränkt veränderliche positive Grösse und t_0 als einen besonderen (festen) Werth derselben betrachten — mit

$$\pm\int_{(t_0\ldots t)} F(u,v,w)\,d\omega$$

bezeichnet, in welcher Formel $d\omega$ das Raumelement $du\,dv\,dw$ bedeutet und das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, jenachdem

$$t>t_0 \quad \text{oder} \quad t<t_0.$$

Dann erhält man durch eine einfache geometrische Betrachtung die folgenden beiden Gleichungen, in denen $d\sigma_t$ ein Element der Fläche σ_t bedeutet.

(A) $$D_t\int_{(t_0\ldots t)} F(u,v,w)\,d\omega = \int \frac{F(u,v,w)\,d\sigma_t}{\sqrt{u'u'+v'v'+w'w'}},$$

(B) $$D_t\int_{(t_0\ldots t)} D_u F(u,v,w)\,d\omega = D_t\int \frac{u'F(u,v,w)\,d\sigma_t}{\sqrt{u'u'+v'v'+w'w'}}.$$ *)

*) Die Gleichung (A) ergiebt sich folgendermassen:
Der Zuwachs von $\int_{(t_0\ldots t)} F(u,v,w)\,d\omega$, wenn t sich um dt ändert, ist gleich

$$\int_{(t,\ldots,t+dt)} F(u,v,w)\,d\omega.$$

Daraus folgt, wenn man in der ersten Formel $u'F$ für F setzt,

$$(C) \qquad D_t \int_{(t_0 \dots t)} D_u F(u,v,w)\, d\omega = D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} u' F(u,v,w)\, d\omega.$$

Nun sei $\varphi(u,v,w)$ eine Function, welche dieselbe Beschaffenheit hat, wie sie für F angenommen ist, $f(u,v,w)$ eine andere Function, die sich überall stetig ändert (auch in der Nähe des Punktes O) und

$$F(x,y,z,t) = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi(u,v,w) f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega,$$

wo x, y, z die Coordinaten eines unbestimmten Punktes bedeuten. Dann hat man:

$$D_x F = D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi D_x f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

$$= D_t \int_{(t_0 \dots t)} \varphi D_u f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

$$= D_t \int_{(t_0 \dots t)} D_u [\varphi . f(x+u, y+v, z+w)]\, d\omega - D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega.$$

Mithin, nach (C):

$$(D) \qquad D_x F = D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} u' \varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$

$$- D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial u} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega.$$

Da der Abstand der Tangentialebenen in entsprechenden Punkten der beiden Flächen σ_t und σ_{t+dt} nach dem Obigen gleich $\frac{dt}{\sqrt{u'u'+v'v'+w'w'}}$ ist, so kann das Raumelement auch die Form

$$\frac{d\sigma_t\, dt}{\sqrt{u'u'+v'v'+w'w'}}$$

erhalten. Mithin ist

$$\int_{(t, \dots, t+dt)} F(u,v,w)\, d\omega = \int \frac{F(u,v,w)\, d\sigma_t\, dt}{\sqrt{u'u'+v'v'+w'w'}},$$

oder wenn man durch dt dividirt:

$$D_t \int_{(t_0 \dots t)} F(u,v,w)\, d\omega = \int \frac{F(u,v,w)\, d\sigma_t}{\sqrt{u'u'+v'v'+w'w'}}.$$

Die Gleichung (B) ergiebt sich durch die bekannte Verwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral; vgl. z. B. Riemann, Schwere, Electricität und Magnetismus, § 19.

Ebenso findet man:

$$D_y F = D_t^1 \int_{(t_0 \dots t)} v' \varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$
$$- D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial v} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega,$$
$$D_z F = D_t^1 \int_{(t_0 \dots t)} w' \varphi f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega$$
$$- D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial \varphi}{\partial w} f(x+u, y+v, z+w)\, d\omega.$$

Daraus ergiebt sich weiter:

(E)
$$\left\{\begin{aligned}
D_x^2 F &= D_t^3 \int_{(t_0 \dots t)} u'u'\varphi \,.\, f(x+u, \dots)\, d\omega \\
&\quad - D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \varphi + 2u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x+u, \dots)\, d\omega + D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} f(x+u, \dots)\, d\omega \\
D_y^2 F &= D_t^3 \int_{(t_0 \dots t)} v'v'\varphi \,.\, f(x+u, \dots)\, d\omega \\
&\quad - D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} \left(\frac{\partial v'}{\partial v} \varphi + 2v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x+u, \dots)\, d\omega + D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} f(x+u, \dots)\, d\omega \\
D_z^2 F &= D_t^3 \int_{(t_0 \dots t)} w'w'\varphi \,.\, f(x+u, \dots)\, d\omega \\
&\quad - D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} \left(\frac{\partial w'}{\partial w} \varphi + 2w' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x+u, \dots)\, d\omega + D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} f(x+u, \dots)\, d\omega \\
D_{yz}^2 F &= D_t^3 \int_{(t_0 \dots t)} v'w'\varphi \,.\, f(x+u, \dots)\, d\omega \\
&\quad - D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} \left(\varphi \frac{\partial v'}{\partial w} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial w} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) f(x+u, \dots)\, d\omega + D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\, \partial w} f(x+u, \dots)\, d\omega \\
D_{zx}^2 F &= D_t^3 \int_{(t_0 \dots t)} w'u'\varphi \,.\, f(x+u, \dots)\, d\omega \\
&\quad - D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} \left(\varphi \frac{\partial w'}{\partial u} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) f(x+u, \dots)\, d\omega + D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w\, \partial u} f(x+u, \dots)\, d\omega \\
D_{xy}^2 F &= D_t^3 \int_{(t_0 \dots t)} u'v'\varphi \,.\, f(x+u, \dots)\, d\omega \\
&\quad - D_t^2 \int_{(t_0 \dots t)} \left(\varphi \frac{\partial u'}{\partial v} + u' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) f(x+u, \dots)\, d\omega + D_t \int_{(t_0 \dots t)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} f(x+u, \dots)\, d\omega.
\end{aligned}\right.$$

Bezeichnet man die Function von u, v, w, welche den zum unbestimmten Punkte (u, v, w) gehörigen Werth von t giebt, mit $\vartheta(u, v, w)$, so ist

$$u' = \frac{\partial\vartheta}{\partial u}, \qquad v' = \frac{\partial\vartheta}{\partial v}, \qquad w' = \frac{\partial\vartheta}{\partial w},$$

also:

$$\frac{\partial v'}{\partial w} = \frac{\partial w'}{\partial v} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v\,\partial w}, \qquad \frac{\partial w'}{\partial u} = \frac{\partial u'}{\partial w} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial w}, \qquad \frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{\partial v'}{\partial u} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v}.$$

Aus den Formeln (E), die beliebig fortgesetzt werden können, folgt nun, wenn $A, B, C, \ldots$ Constanten bedeuten,

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2A'\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} + 2B'\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x} + 2C'\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \\ &= D_t^3\int_{(t_0\ldots t)} Pf(x+u, y+v, z+w)\,d\omega - D_t^2\int_{(t_0\ldots t)} Qf(x+u, y+v, z+w)\,d\omega \\ &\qquad + D_t\int_{(t_0\ldots t)} Rf(x+u, y+v, z+w)\,d\omega. \end{aligned}$$

Bei der Entwickelung dieser Formeln ist, ausser der in Betreff der Functionen f, φ gemachten Annahme, vorausgesetzt worden, dass die Functionen u', v', w' und deren Ableitungen, so weit dieselben in den Formeln vorkommen, in der Fläche σ sich stetig ändern. Die Formeln lassen sich jedoch auch in manchen Fällen anwenden, wo die hinsichtlich der Functionen φ, u', v', w' gemachten Annahmen in einzelnen Punkten nicht zutreffen.

Bildet man nämlich für verschiedene Functionen φ, die mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ bezeichnet werden mögen, aber für eine und dieselbe Function f die Ausdrücke

$$\begin{aligned} F_1 &= D_t\int_{(t_0\ldots t)} \varphi_1(u, v, w)\,f(x+u, y+v, z+w)\,d\omega \\ F_2 &= D_t\int_{(t_0\ldots t)} \varphi_2(u, v, w)\,f(x+u, y+v, z+w)\,d\omega \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

und ist T irgend ein aus partiellen Ableitungen von F_1, F_2 u. s. w. nach x, y, z linear und mit constanten Coefficienten zusammengesetzter Ausdruck, so lässt sich derselbe mittelst der aufgestellten Formeln in der Gestalt

$$\begin{aligned} T = {} & D_t\int_{(t_0\ldots t)} \Phi_1(u, v, w)\,f(x+u, y+v, z+w)\,d\omega \\ & + D_t^2\int_{(t_0\ldots t)} \Phi_2(u, v, w)\,f(x+u, y+v, z+w)\,d\omega \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

darstellen, wo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ Ausdrücke sind, welche aus den Functionen $u', v', w', \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und deren Ableitungen so zusammengesetzt werden, dass auch in dem Falle, wo die letzteren an einzelnen Stellen sich nicht stetig ändern, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ Functionen von u, v, w sein können, welche der im Vorstehenden hinsichtlich der Function φ gemachten Annahme entsprechen. Trifft dieses zu, so ist die angegebene Darstellung von T zulässig.*)

Diese Formeln sollen jetzt angewendet werden auf die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2A'\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x} + 2C'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$$

für den Fall, dass die reellen Coefficienten $A, B, \ldots$ solche Werthe haben, dass die Function

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2A'yz + 2B'zx + 2C'xy$$

bei reellen Werthen von x, y, z stets positiv bleibt und nur dann Null wird, wenn diese Grössen sämmtlich verschwinden.

Das Resultat, in Doppelintegrale verwandelt, stimmt überein mit dem von Cauchy (Journal de l'École Polytechnique, Cah. 20, p. 297—309) und in dem besonderen Falle, wo

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi,$$

mit dem von Poisson in einer Abhandlung in den Mémoires de l'Académie des Sciences gegebenen.

Es sei in diesem Falle die Fläche σ ein Ellipsoid, und die Gleichung desselben

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1.$$

Dann ist

$$\vartheta^2 = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv,$$

---

*) Ich muss bei dieser Gelegenheit auch bemerken, dass ich in diesem Sommer, nachdem meine Arbeit schon fertig war, durch eine freundliche persönliche Mittheilung von Prof. Kronecker erfahren habe, dass er ähnliche Transformationsformeln für dreifache Integrale, welche auf der Differentiation nach einem Parameter beruhen, von welchem die Begrenzung des Integrales abhängt, bei seinen Untersuchungen über das Potential gebraucht hat. [Anmerkung der Frau v. Kovalevsky.]

und daher

$$\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial u} = au + c'v + b'w, \qquad \vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = c'u + bv + a'w, \qquad \vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = b'u + a'v + cw,$$

welche drei lineare Functionen mit U, V, W bezeichnet werden mögen, und

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + v\frac{\partial\vartheta}{\partial v} + w\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = \vartheta.$$

Daraus folgt, da

$$P = \left[(AU + C'V + B'W)\frac{\partial\vartheta}{\partial u} + (C'U + BV + A'W)\frac{\partial\vartheta}{\partial v} + (B'U + A'V + CW)\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right]\frac{\varphi}{\vartheta}$$

ist, dass man $P = \varphi$ erhält, wenn man a, b, etc. so wählt, dass die Gleichungen

$$AU + C'V + B'W = u, \qquad C'U + BV + A'W = v, \qquad B'U + A'V + CW = w$$

erfüllt werden. Aus denselben folgt aber, wenn man

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C'$$

setzt:

$$a = \frac{BC - A'A'}{G}, \qquad b = \frac{CA - B'B'}{G}, \qquad c = \frac{AB - C'C'}{G},$$

$$a' = \frac{B'C' - AA'}{G}, \qquad b' = \frac{C'A' - BB'}{G}, \qquad c' = \frac{A'B' - CC'}{G}.$$

Nimmt man nun ferner

$$\varphi = \frac{1}{\vartheta},$$

so hat man

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial u} = -\vartheta^{-3}U,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = -\vartheta^{-3}V,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial w} = -\vartheta^{-2}\frac{\partial\vartheta}{\partial w} = -\vartheta^{-3}W,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = -a\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-4}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w} = -a'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-4}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\frac{\partial\vartheta}{\partial w},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = -b\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-4}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial w\,\partial u} = -b'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-4}\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\frac{\partial\vartheta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial w^2} = -c\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-4}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = -c'\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-4}\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}.$$

Daraus folgt, mit Berücksichtigung der Gleichung $P = \varphi = \vartheta^{-1}$,

$$R = -(Aa + Bb + Cc + 2A'a' + 2B'b' + 2C'c')\,\vartheta^{-3} + 3\vartheta^{-3}.$$

Aber es ist

$$\begin{aligned} Aa + C'c' + B'b' &= 1, \\ C'c' + Bb + A'a' &= 1, \\ B'b' + A'a' + Cc &= 1, \end{aligned}$$

und somit

$$R = 0,$$

woraus weiter auch $Q = 0$ folgt.

Wir haben also folgendes Resultat:

Setzt man

$$\vartheta^2(u, v, w) = \frac{BC - A'A'}{G} u^2 + \frac{CA - B'B'}{G} v^2 + \frac{AB - C'C'}{G} w^2 + 2\frac{B'C' - AA'}{G} vw + 2\frac{C'A' - BB'}{G} wu + 2\frac{A'B' - CC'}{G} uv$$

und

$$F = D_t \iiint_{[\vartheta^2(u,v,w) < t^2]} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u, v, w)}\, du\, dv\, dw,$$

wo die Integration über alle Punkte des Raumes auszudehnen ist, für welche $\vartheta^2(u, v, w) < t^2$ ist (t_0 ist gleich Null angenommen, was erlaubt ist, da F nicht davon abhängt und das dreifache Integral einen Sinn behält, trotzdem dass für den Punkt O $\vartheta = 0$ ist), so wird der betrachteten partiellen Differentialgleichung genügt, wenn $\psi = F$ genommen wird.

Nach der Gleichung (A) ist

$$D_t \iiint_{[\vartheta^2(u,v,w) < t^2]} \frac{f(x+u, \ldots)}{\vartheta(u, v, w)}\, du\, dv\, dw = \int \frac{f(x+u, \ldots)}{\vartheta \sqrt{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial w}\right)^2}}\, d\sigma_t = \int \frac{f(x+u, \ldots)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}\, d\sigma_t,$$

wo $d\sigma_t$ ein Element der durch die Gleichung

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = t^2$$

dargestellten Fläche bedeutet. Daraus folgt weiter

$$F = \int \frac{tf(x+tu, y+tv, z+tw)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}\, d\sigma,$$

wenn man unter $d\sigma$ ein Element der Fläche

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv = 1$$

versteht, unter u, v, w die Coordinaten eines zugehörigen Punktes, und die Integration über die ganze Fläche ausdehnt.

Das Vorstehende gilt zunächst unter der Voraussetzung, dass t positiv ist. Es ist aber für einen positiven Werth von t

$$\iiint_{[\vartheta^2(u,v,w)<t^2]} \frac{f(x+u,\ldots)\,du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \int_0^t \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma\right)\tau\,d\tau.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite hat nun auch eine Bedeutung für negative Werthe von t, bleibt jedoch, wenn $-t$ für t gesetzt wird, unverändert, denn

$$\int_0^{-t} \left(\int \frac{f(x+\tau u, y+\tau v, z+\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma\right)\tau\,d\tau$$
$$= \int_0^t \left(\int \frac{f(x-\tau u, y-\tau v, z-\tau w)}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\,d\sigma\right)\tau\,d\tau.$$

Für jede Fläche σ aber, welche die Beschaffenheit hat, dass sie von einer durch O gehenden Geraden in zweien, gleichweit von O abliegenden Punkten geschnitten wird, ist bei einer beliebigen Function $f(u,v,w)$

$$\int f(u,v,w)\,d\sigma = \int f(-u,-v,-w)\,d\sigma.$$

Es ist also das dreifache Integral, von dem F die Ableitung nach t ist, eine grade Function von t, F selbst also eine ungrade. Wenn aber die gegebene Differentialgleichung, unter der Voraussetzung dass ψ eine ungrade oder grade Function von t ist, für alle positiven Werthe dieser Grösse besteht, so ist sie auch für alle negativen gültig.

Für $t = 0$ wird $F = 0$, und

$$\frac{\partial F}{\partial t} = f(x,y,z)\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}.$$

Es ist aber

$$\iiint_{(\vartheta^2<1)} \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \int_0^1 \left(\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}\right)\tau\,d\tau = \frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\sqrt{U^2+V^2+W^2}}.$$

Mithin, wenn man

$$\int\int\int_{(\vartheta^2<1)} \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} = \tilde{\omega}$$

setzt, und

$$\psi = \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \int\int\int_{(\vartheta^2<t^2)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw,$$

so ist ψ eine Function, die der vorgelegten Differentialgleichung genügt und zu gleicher Zeit für $t = 0$ die Bedingungen erfüllt:

$$\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z).$$

Daraus folgt sofort, dass man die allgemeine Lösung erhält, wenn man eine zweite willkürliche Function $F(x,y,z)$ annimmt, und

$$\psi = \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t^2 \int\int\int_{(\vartheta^2<t^2)} \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$
$$+ \frac{1}{2\tilde{\omega}} D_t \int\int\int_{(\vartheta^2<t^2)} \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw$$

setzt. Denn dann wird für $t = 0$

$$\psi = F(x,y,z), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z).$$

Führt man an Stelle von u, v, w drei andere Veränderliche p, q, r ein:

$$p = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$
$$q = \alpha' u + \beta' v + \gamma' w,$$
$$r = \alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w,$$

so können die Constanten α, β, etc. so bestimmt werden, dass

$$u^2 + v^2 + w^2 \quad \text{in} \quad p^2 + q^2 + r^2$$

und

$$au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'vw + 2b'wu + 2c'uv \quad \text{in} \quad gp^2 + hq^2 + kr^2$$

übergeht, wo g, h, k positive Constanten sind. Dann hat man

$$\text{für } \frac{du\,dv\,dw}{\vartheta(u,v,w)} \text{ zu setzen } \frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2+hq^2+kr^2}},$$

und die Integration erstreckt sich über alle Werthe von p, q, r, für welche

$$gp^2 + hq^2 + kr^2 < t^2$$

ist. Diese erhält man, wenn man

$$p = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \tau \cos\lambda, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot \tau \sin\lambda \cos\mu, \qquad r = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \tau \sin\lambda \sin\mu$$

setzt, und

τ alle Werthe von 0 bis t,
λ alle Werthe von 0 bis π,
μ alle Werthe von 0 bis 2π

beilegt. Dann muss

$$\frac{dp\,dq\,dr}{\sqrt{gp^2 + hq^2 + kr^2}} \text{ ersetzt werden durch } \frac{\tau \sin\lambda\, d\tau\, d\lambda\, d\mu}{\sqrt{ghk}},$$

wobei zu bemerken, dass $ghk = \frac{1}{G}$ ist. Danach hat man, wenn $X(u, v, w)$ eine beliebige Function von u, v, w ist,

$$\iiint_{(\vartheta^2 < t^2)} \frac{X(u, v, w)\, du\, dv\, dw}{\vartheta(u, v, w)} = \int_0^t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{G} \,.\, X(\tau u_1, \tau v_1, \tau w_1)\, \tau \sin\lambda\, d\mu\, d\lambda\, d\tau,$$

wo

$$u_1 = \alpha \frac{\cos\lambda}{\sqrt{g}} + \alpha' \frac{\sin\lambda\cos\mu}{\sqrt{h}} + \alpha'' \frac{\sin\lambda\sin\mu}{\sqrt{k}},$$

$$v_1 = \beta \frac{\cos\lambda}{\sqrt{g}} + \beta' \frac{\sin\lambda\cos\mu}{\sqrt{h}} + \beta'' \frac{\sin\lambda\sin\mu}{\sqrt{k}},$$

$$w_1 = \gamma \frac{\cos\lambda}{\sqrt{g}} + \gamma' \frac{\sin\lambda\cos\mu}{\sqrt{h}} + \gamma'' \frac{\sin\lambda\sin\mu}{\sqrt{k}}.$$

Setzt man $X(u, v, w) = 1$ und $t = 1$, so kommt

$$\tilde{\omega} = \sqrt{G} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tau \sin\lambda\, d\tau\, d\lambda\, d\mu = 2\pi\sqrt{G}.$$

Wir haben also das Resultat:

Es seien $F(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ zwei willkürlich angenommene Functionen von x, y, z,

$$G = ABC - AA'A' - BB'B' - CC'C' + 2A'B'C',$$

$$\vartheta^2(u,v,w) = \frac{BC-A'A'}{G}u^2+\frac{CA-B'B'}{G}v^2+\frac{AB-C'C'}{G}w^2$$
$$+2\frac{B'C'-AA'}{G}vw+2\frac{C'A'-BB'}{G}wu+2\frac{A'B'-CC'}{G}uv,$$

$$F(x,y,z,t) = \iiint_{[\vartheta^2(u,v,w)<t^2]} \frac{F(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw,$$

$$f(x,y,z,t) = \iiint_{[\vartheta^2(u,v,w)<t^2]} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{\vartheta(u,v,w)}\,du\,dv\,dw.$$

Dann ist

$$\psi = \frac{1}{4\pi\sqrt{G}}\left(\frac{\partial^2 F(x,y,z,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t}\right)$$

eine Function von x, y, z, t, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+2A'\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}+2B'\frac{\partial^2\psi}{\partial z\,\partial x}+2C'\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}$$

genügt und zugleich so beschaffen ist, dass für $t=0$

$$\psi = F(x,y,z), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = f(x,y,z)$$

wird.

Dabei müssen aber

$$A,\ AB-C'C',\ G$$

alle drei positiv sein.

Hat man namentlich die Gleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),$$

so ist $\sqrt{G}=a^3$,

$$\vartheta(u,v,w) = \frac{1}{a}\sqrt{u^2+v^2+w^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}F(x,y,z,t) = \iiint_{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)} \frac{F(x+u,y+v,z+w)}{a^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,du\,dv\,dw,$$

$$\frac{1}{\sqrt{G}}f(x,y,z,t) = \iiint_{(u^2+v^2+w^2<a^2t^2)} \frac{f(x+u,y+v,z+w)}{a^2\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\,du\,dv\,dw.$$

Hat die Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2},$$

so ist $\sqrt{G} = abc$,

$$\vartheta^2 = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2},$$

also

$$4abc\pi\psi = \frac{\partial^2 F(x,y,z,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t},$$

$$F(x,y,z,t) = \iiint \frac{F(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}}}\,du\,dv\,dw,$$

$$f(x,y,z,t) = \iiint \frac{f(x+u, y+v, z+w)}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}}}\,du\,dv\,dw.$$

$$\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2} < t^2\right)$$

Die Integration des folgenden Systems partieller Differentialgleichungen (in denen a, b positive Constanten, t, x, y, z unbeschränkt veränderliche reelle Grössen und ξ, η, ζ zu bestimmende Functionen derselben bedeuten):

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} [D_t^2 - a^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\xi - (b^2-a^2)\,D_x(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ [D_t^2 - a^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\eta - (b^2-a^2)\,D_y(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \\ [D_t^2 - a^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\zeta - (b^2-a^2)\,D_z(D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta) = 0 \end{cases}$$

lässt sich zurückführen auf die Integration der Differentialgleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2) f = 0.$$

Zunächst ergiebt sich aus den Regeln, nach denen man die Integration eines solchen Systems partieller Differentialgleichungen auf die einer einzigen mit einer unbekannten Function reducirt, dass man setzen kann:

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} \xi = [D_t^2 - b^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\varphi_1 + (b^2-a^2)\,D_x(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ \eta = [D_t^2 - b^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\varphi_2 + (b^2-a^2)\,D_y(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3) \\ \zeta = [D_t^2 - b^2(D_x^2+D_y^2+D_z^2)]\,\varphi_3 + (b^2-a^2)\,D_z(D_x\varphi_1 + D_y\varphi_2 + D_z\varphi_3), \end{cases}$$

wobei φ_1, φ_2, φ_3 drei Functionen von t, x, y, z bedeuten, von denen jede

die folgende Differentialgleichung befriedigt, in der zur Abkürzung

$$\Delta = D_x^2 + D_y^2 + D_z^2$$

gesetzt ist:

(H) $$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0.$$

Nun bedeute $f(t, x, y, z)$ oder kürzer $f(t)$ eine Function von t, x, y, z, welche der Gleichung

(I) $$(D_t^2 - \Delta) f(t) = 0$$

genügt, und in Beziehung auf t ungrade ist. Ferner sei $\psi(t, x, y, z)$ oder $\psi(t)$ eine in Beziehung auf t ebenfalls ungrade Function, welche die Gleichung

$$D_t^2 \psi(t) = f(t)$$

befriedigt.

Dann hat man

$$(D_t^2 - \Delta) D_t^2 \psi(t) = 0$$

oder

$$D_t^2 [(D_t^2 - \Delta)\psi(t)] = 0,$$

woraus, mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $(D_t^2 - \Delta)\psi(t)$ eine ungrade Function von t ist,

$$(D_t^2 - \Delta)\psi(t) = \psi_0 . t$$

folgt, wo ψ_0 bloss von x, y, z abhängt.

Setzt man in dieser Gleichung at für t, so ergiebt sich

$$\frac{1}{a^2} D_t^2 \psi(at) - \Delta\psi(at) = \psi_0 . at$$

oder

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\psi(at) = a^3 t . \psi_0,$$

und ebenso

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(bt) = b^3 t . \psi_0.$$

Daher

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(at) = -a^3 b^3 t . \Delta\psi_0,$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\psi(bt) = -a^3 b^3 t . \Delta\psi_0,$$

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\left(\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)\right) = 0.$$

Setzt man daher

$$\varphi = \frac{\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)}{a^2 - b^2},$$

so ergiebt sich

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0,$$

und zugleich hat man für $t = 0$

$$\varphi = 0, \quad D_t\varphi = 0, \quad D_t^2\varphi = 0, \quad D_t^3\varphi = \left(\frac{a^2\psi'''(at) - b^2\psi'''(bt)}{a^2 - b^2}\right)_{t=0} = \psi'''(0) = f'(0),$$

so dass, wenn man $f(t, x, y, z)$ so bestimmt, dass für $t = 0$

$$D_t f(t, x, y, z) = F(x, y, z)$$

wird, φ dasjenige Integral der Gleichung (H) ist, welches für $t = 0$ den Bedingungen genügt

$$\varphi = 0, \qquad D_t\varphi = 0, \qquad D_t^2\varphi = 0, \qquad D_t^3\varphi = F(x, y, z).$$

Dabei ist φ eine ungrade Function von t.

Bestimmt man nun drei solche Functionen $f_1(t, x, y, z)$, $f_2(t, x, y, z)$, $f_3(t, x, y, z)$, welche für f gesetzt der Gleichung (I) genügen und bezeichnet mit φ_1, φ_2, φ_3 die Functionen, welche aus diesen so abgeleitet sind, wie hier φ aus f, und substituirt diese in die Gleichungen (G), so erhält man für ξ, η, ζ Ausdrücke, welche den Gleichungen (F) genügen, und zwar so, dass für $t = 0$

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \quad & D_t\xi &= f_1'(0, x, y, z), \\ \eta &= 0, \quad & D_t\eta &= f_2'(0, x, y, z), \\ \zeta &= 0, \quad & D_t\zeta &= f_3'(0, x, y, z). \end{aligned}$$

Dabei ist zu bemerken, dass weil

$$\Delta\psi(at) = \frac{1}{a^2}D_t^2\psi(at) - a\psi_0.t = f(at) - a\psi_0.t$$

ist, man

$$\begin{aligned} b^2\Delta\psi(at) &= b^2 f(at) - ab^2\psi_0.t, \\ (D_t^2 - b^2\Delta)\psi(at) &= ab^2\psi_0.t + (a^2 - b^2)f(at) \end{aligned}$$

hat, und daher

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = (D_t^2 - b^2\Delta)\frac{\frac{1}{a}\psi(at) - \frac{1}{b}\psi(bt)}{a^2 - b^2} = \frac{(a^2 - b^2)\frac{f(at)}{a} + b^2\psi_0.t - b^2\psi_0.t}{a^2 - b^2} = \frac{1}{a}f(at).$$

Mithin kann man die Gleichungen (G) auch schreiben

$$\xi = \frac{1}{a} f_1(at) - D_x\left\{D_x\left[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\right] + D_y\left[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\right] + D_z\left[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\right]\right\},$$

$$\eta = \frac{1}{a} f_2(at) - D_y\left\{D_x\left[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\right] + D_y\left[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\right] + D_z\left[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\right]\right\},$$

$$\zeta = \frac{1}{a} f_3(at) - D_z\left\{D_x\left[\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt)\right] + D_y\left[\frac{1}{a}\psi_2(at) - \frac{1}{b}\psi_2(bt)\right] + D_z\left[\frac{1}{a}\psi_3(at) - \frac{1}{b}\psi_3(bt)\right]\right\}.$$

Es ist ferner

$$\psi_1(t) = \int_0^t (t-\tau) f_1(\tau)\, d\tau + \psi_0^{(1)} . t,$$

$$\psi_2(t) = \int_0^t (t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau + \psi_0^{(2)} . t,$$

$$\psi_3(t) = \int_0^t (t-\tau) f_3(\tau)\, d\tau + \psi_0^{(3)} . t,$$

und daher

$$\frac{1}{a}\psi_1(at) - \frac{1}{b}\psi_1(bt) = \int_0^{at}\left(t - \frac{\tau}{a}\right) f_1(\tau)\, d\tau - \int_0^{bt}\left(t - \frac{\tau}{b}\right) f_1(\tau)\, d\tau$$
$$= \int_0^t (t-\tau)\left[a f_1(at) - b f_1(bt)\right] d\tau$$

etc.

Zur Integration der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\,\varphi = 0$$

kann man auch folgendermassen gelangen.

Es sei

$$\varphi(t, a)$$

eine Function von t, welche der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\,\varphi(t, a) = 0$$

genügt, und den Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t, a) = 0, \qquad D_t\varphi(t, a) = G(x, y, z),$$

wo G eine willkürliche Function von x, y, z ist.

Ebenso sei $\varphi(t, b)$ definirt durch die Gleichung

$$(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi(t, b) = 0$$

und die Bedingung, dass für $t = 0$

$$\varphi(t, b) = 0, \qquad D_t\varphi(t, b) = G(x, y, z).$$

Dann sind $\varphi(t, a)$, $\varphi(t, b)$ beide ungrade Functionen von t. Wenn wir

$$\varphi(t) = \varphi(t, b) - \varphi(t, a)$$

setzen, so genügt $\varphi(t)$ der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)(D_t^2 - b^2\Delta)\varphi = 0,$$

und man hat für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \qquad D_t\varphi(t) = 0, \qquad D_t^2\varphi(t) = 0, \qquad D_t^3\varphi(t) = D_t^3\varphi(t, a) - D_t^3\varphi(t, b).$$

Aber

$$D_t^3\varphi(t, a) = a^2\Delta D_t\varphi(t, a)$$

und daher

$$[D_t^3\varphi(t, a)]_{t=0} = a^2\Delta G$$

und ebenso

$$[D_t^3\varphi(t, b)]_{t=0} = b^2\Delta G,$$

also

$$[D_t^3\varphi(t)]_{t=0} = (b^2 - a^2)\Delta G.$$

Bestimmt man daher G so, dass

$$(b^2 - a^2)\Delta G = f(x, y, z),$$

so ist $\varphi(t)$ diejenige der betrachteten Gleichung genügende Function, welche die Bedingungen, dass für $t = 0$

$$\varphi(t) = 0, \qquad D_t\varphi(t) = 0, \qquad D_t^2\varphi(t) = 0, \qquad D_t^3\varphi(t) = f$$

sein soll, erfüllt.

Nun aber hat man, wenn

$$D_t^2\varphi(t, a) = \varphi''(t, a), \qquad D_t^2\varphi(t, b) = \varphi''(t, b)$$

gesetzt wird, auch

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\,\varphi''(t,a) = 0, \qquad (D_t^2 - b^2\Delta)\,\varphi''(t,b) = 0,$$

und für $t = 0$

$$\varphi''(t,a) = 0, \qquad D_t\varphi''(t,a) = a^2\Delta G = \frac{a^2}{b^2-a^2}f,$$

$$\varphi''(t,b) = 0, \qquad D_t\varphi''(t,b) = b^2\Delta G = \frac{b^2}{b^2-a^2}f.$$

Es ist also

$$\frac{b^2-a^2}{a^2}\varphi''(t,a)$$

diejenige der Gleichung

$$(D_t^2 - a^2\Delta)\,F = 0$$

genügende Function, welche die Bedingungen erfüllt, dass für $t = 0$

$$F = 0, \qquad D_t F = f$$

sei. Also

$$\frac{b^2-a^2}{a^2}\varphi''(t,a) = \frac{1}{a}f(at)$$

und ebenso

$$\frac{b^2-a^2}{b^2}\varphi''(t,b) = \frac{1}{b}f(bt).$$

Daraus folgt

$$\varphi(t,a) = \frac{a}{b^2-a^2}\int_0\int_0 f(at)\,dt\,dt + tG,$$

$$\varphi(t,b) = \frac{b}{b^2-a^2}\int_0\int_0 f(bt)\,dt\,dt + tG.$$

Ist nun $\psi(t)$ eine Function von t, deren zweite Ableitung $f(t)$ ist und die für $t = 0$ verschwindet, so hat man

$$D_t^2\psi(at) = a^2 f(at),$$

$$a\int_0\int_0 f(at)\,dt\,dt = \frac{1}{a}\psi(at) - t\psi'(0),$$

wo

$$\psi'(0) = [D_t\psi(t)]_{t=0}.$$

Also

$$\varphi(t,a) = \frac{1}{a(b^2-a^2)}\psi(at) + t\left[G - \frac{1}{b^2-a^2}\psi'(0)\right]$$

und

$$\varphi(t) = \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{b}\psi(bt) - \frac{1}{a}\psi(at)\right].$$

Die vorstehenden Formeln geben die allgemeinen Integrale der Gleichungen (F) für den Fall, dass ξ, η, ζ für $t = 0$ verschwinden, also jedenfalls auch, wenn ξ, η, ζ ungrade Functionen von t sein sollen. Nimmt man nun drei Ausdrücke von derselben Form, in denen aber f_1, f_2, f_3 durch drei andere Functionen vertreten sind, bildet von diesen die Ableitungen nach t und fügt diese bezüglich zu ξ, η, ζ hinzu, so hat man die allgemeinen Ausdrücke dieser Grössen.

Es ergiebt sich also folgendes Resultat: Man bestimme sechs Functionen

$$\begin{array}{lll} f_1(t,x,y,z), & f_2(t,x,y,z), & f_3(t,x,y,z), \\ F_1(t,x,y,z), & F_2(t,x,y,z), & F_3(t,x,y,z), \end{array}$$

welche für f gesetzt, der Gleichung

$$(D_t^2 - D_x^2 - D_y^2 - D_z^2) f = 0$$

genügen, und überdies alle für $t = 0$ verschwinden, ferner seien

$$\begin{array}{lll} \psi_1(t,x,y,z), & \psi_2(t,x,y,z), & \psi_3(t,x,y,z), \\ \Psi_1(t,x,y,z), & \Psi_2(t,x,y,z), & \Psi_3(t,x,y,z) \end{array}$$

diejenigen sechs Functionen, deren zweite Ableitungen nach t beziehlich

$$\begin{array}{lll} f_1, & f_2, & f_3, \\ F_1, & F_2, & F_3 \end{array}$$

sind, und welche ebenfalls für $t = 0$ sämmtlich verschwinden. Setzt man dann

$$\begin{aligned} \psi(t,x,y,z) &= D_x \psi_1(t,x,y,z) + D_y \psi_2(t,x,y,z) + D_z \psi_3(t,x,y,z), \\ \Psi(t,x,y,z) &= D_x \Psi_1(t,x,y,z) + D_y \Psi_2(t,x,y,z) + D_z \Psi_3(t,x,y,z), \end{aligned}$$

so sind

$$\left.\begin{array}{l} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a} f_1(at) + \frac{1}{a} D_t F_1(at) + D_x \\ \frac{1}{a} f_2(at) + \frac{1}{a} D_t F_2(at) + D_y \\ \frac{1}{a} f_3(at) + \frac{1}{a} D_t F_3(at) + D_z \end{array}\right\} \left(\frac{1}{b} \psi(bt) - \frac{1}{a} \psi(at) + \frac{1}{b} D_t \Psi(bt) - \frac{1}{a} D_t \Psi(at) \right)$$

die allgemeinen Integrale der Gleichungen (F).

Hieraus erhält man ferner mit einiger Änderung der Bezeichungen die Integrale der folgenden Differentialgleichungen, in denen

$$\vartheta = D_x\xi + D_y\eta + D_z\zeta$$

und P, Q, R gegebene Functionen von t, x, y, z bedeuten:

$$\begin{aligned}(D_t^2 - a^2\Delta)\xi - (b^2 - a^2)D_x\vartheta &= P(t,x,y,z),\\ (D_t^2 - a^2\Delta)\eta - (b^2 - a^2)D_y\vartheta &= Q(t,x,y,z),\\ (D_t^2 - a^2\Delta)\zeta - (b^2 - a^2)D_z\vartheta &= R(t,x,y,z).\end{aligned}$$

Man bestimme sechs Functionen

$$\begin{aligned}&F_1(t), \quad F_2(t), \quad F_3(t),\\ &F_1'(t), \quad F_2'(t), \quad F_3'(t)\end{aligned}$$

von t und x, y, z, welche für f gesetzt der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies für $t = 0$ sämmtlich verschwinden.

Ferner seien

$$\begin{aligned}&\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t),\\ &\varphi_1'(t), \quad \varphi_2'(t), \quad \varphi_3'(t)\end{aligned}$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t den obigen sechs Functionen respective gleich sind und die ebenfalls für $t = 0$ alle Null werden. Endlich seien

$$F_1''(t,\tau), \quad F_2''(t,\tau), \quad F_3''(t,\tau)$$

— wo τ eine unbestimmte Grösse bedeutet — drei Functionen, welche ebenfalls der Gleichung

$$(D_t^2 - \Delta)F = 0$$

genügen und überdies so bestimmt sind, dass für $t = 0$

$$\begin{aligned}&F_1'' = 0, \quad F_2'' = 0, \quad F_3'' = 0,\\ &D_tF_1'' = P(\tau,x,y,z), \quad D_tF_2'' = Q(\tau,x,y,z), \quad D_tF_3'' = R(\tau,x,y,z).\end{aligned}$$

Bezeichnet man dann mit

$$\varphi_1''(t,\tau), \quad \varphi_2''(t,\tau), \quad \varphi_3''(t,\tau)$$

Functionen, deren zweite Ableitungen nach t

$$F_1'', \quad F_2'', \quad F_3''$$

sind, und welche für $t = 0$ ebenfalls verschwinden, und setzt:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= D_x\varphi_1(t) + D_y\varphi_2(t) + D_z\varphi_3(t),\\
\varphi'(t) &= D_x\varphi_1'(t) + D_y\varphi_2'(t) + D_z\varphi_3'(t),\\
\varphi''(t,\tau) &= D_x\varphi_1''(t,\tau) + D_y\varphi_2''(t,\tau) + D_z\varphi_3''(t,\tau),
\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}
\xi = {} & D_t\left\{\frac{1}{a}F_1(at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_1'(at) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)\\
& + \int_0^t\left\{\frac{1}{a}F_1''(at-a\tau,\tau) + D_x\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt-b\tau,\tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at-a\tau,\tau)\right)\right\}d\tau,\\
\eta = {} & D_t\left\{\frac{1}{a}F_2(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_2'(at) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)\\
& + \int_0^t\left\{\frac{1}{a}F_2''(at-a\tau,\tau) + D_y\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt-b\tau,\tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at-a\tau,\tau)\right)\right\}d\tau,\\
\zeta = {} & D_t\left\{\frac{1}{a}F_3(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi(bt) - \frac{1}{a}\varphi(at)\right)\right\} + \frac{1}{a}F_3'(at) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi'(bt) - \frac{1}{a}\varphi'(at)\right)\\
& + \int_0^t\left\{\frac{1}{a}F_3''(at-a\tau,\tau) + D_z\left(\frac{1}{b}\varphi''(bt-b\tau,\tau) - \frac{1}{a}\varphi''(at-a\tau,\tau)\right)\right\}d\tau.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man daher die Functionen, in welche

$$D_tF_1(t), \quad D_tF_2(t), \quad D_tF_3(t); \quad D_tF_1'(t), \quad D_tF_2'(t), \quad D_tF_3'(t)$$

für $t = 0$ übergehen, mit

$$f_1(x,y,z), \quad f_2(x,y,z), \quad f_3(x,y,z); \quad f_1'(x,y,z), \quad f_2'(x,y,z), \quad f_3'(x,y,z),$$

so hat man für $t = 0$

$$\begin{aligned}
\xi &= f_1(x,y,z), & \eta &= f_2(x,y,z), & \zeta &= f_3(x,y,z),\\
D_t\xi &= f_1'(x,y,z), & D_t\eta &= f_2'(x,y,z), & D_t\zeta &= f_3'(x,y,z).
\end{aligned}$$

Dabei können bei der Bestimmung der F die f willkürlich angenommen werden.

ANMERKUNG.

Diese im Jahre 1861 verfasste und 1863 der Akademie der Wissenschaften vorgelegte Abhandlung (Monatsberichte S. 86) ist mit Erlaubniss des Verfassers von Frau v. Kovalevsky bei Gelegenheit ihrer Untersuchung „Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln“ veröffentlicht worden.

THEORIE DER ABEL'SCHEN FUNCTIONEN.

(Aus der im 52. Bande des Crelle'schen Journals unter gleichem Titel erschienenen Abhandlung.)

Einleitung.

Das Abel'sche Theorem über die hyperelliptischen Integrale bildet die Grundlage für die Theorie einer neuen Gattung analytischer Functionen, die deswegen passend Abel'sche Functionen genannt, und folgendermassen definirt werden können.

Es bedeute

$$R(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2\varrho+1})$$

eine ganze Function $(2\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades von x, wobei angenommen werde, dass unter den Grössen

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_{2\varrho+1}$$

keine zwei gleiche sich finden, während sie im Übrigen beliebige (reelle und imaginäre) Werthe haben können. Ferner seien $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ ϱ unbeschränkt veränderliche Grössen, und zwischen diesen und eben so vielen von ihnen abhängigen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die nachstehenden Differential-Gleichungen, in denen

$$P(x) \text{ das Product } (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$$

bedeutet, gegeben:

$$du_1 = \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \dots + \frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_1}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

$$du_2 = \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_2}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_2}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \dots + \frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_2}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$du_\varrho = \frac{1}{2}\frac{P(x_1)}{x_1-a_\varrho}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{P(x_2)}{x_2-a_\varrho}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \dots + \frac{1}{2}\frac{P(x_\varrho)}{x_\varrho-a_\varrho}\cdot\frac{dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}};$$

mit der Bestimmung, dass $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ annehmen sollen, wenn $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden.

Alsdann sind $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ als die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$x^\varrho + P_1 x^{\varrho-1} + P_2 x^{\varrho-2} + \cdots + P_\varrho = 0$$

zu betrachten, wo $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ eindeutige analytische Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ bedeuten; während eine zweite ganze Function von x des $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$Q_1 x^{\varrho-1} + Q_2 x^{\varrho-2} + \cdots + Q_\varrho,$$

deren Coefficienten eben solche Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ sind, wenn man $x = x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ setzt, die zugehörigen Werthe von

$$\sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \ldots \quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

giebt.*)

Hiernach ist jeder rational und symmetrisch aus

$$x_1, x_2, \ldots x_\varrho \text{ und } \sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \ldots \quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

zusammengesetzte Ausdruck als eine eindeutige Function von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ anzusehen. Insbesondere aber zeigt es sich, dass das Product

$$(a_\mathfrak{r} - x_1)(a_\mathfrak{r} - x_2) \ldots (a_\mathfrak{r} - x_\varrho),$$

wo $\mathfrak{r}$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots 2\varrho+1$ bedeutet, das Quadrat einer solchen ist. Betrachtet man demgemäss, indem man

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_\varrho)$$

setzt, und unter $h_1, h_2, \ldots h_{2\varrho+1}$ Constanten versteht, die Grössen

$$\sqrt{h_1 \varphi(a_1)}, \quad \sqrt{h_2 \varphi(a_2)}, \quad \ldots \quad \sqrt{h_{2\varrho+1} \varphi(a_{2\varrho+1})}$$

als Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$, so kann man nicht nur aus denselben die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ sind, leicht zusammensetzen, sondern sie zeichnen sich auch gleich den elliptischen $\operatorname{sin am} u$, $\operatorname{cos am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$, auf welche sie sich für $\varrho = 1$ reduciren, und denen sie überhaupt vollkommen analog sind, durch eine solche Menge merkwürdiger

*) Den ersten Theil dieses Satzes hat bereits Jacobi ausgesprochen, und dadurch den wahren analytischen Charakter der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ klar gemacht.

und fruchtbarer Eigenschaften aus, dass man ihnen und einer Reihe anderer, im Zusammenhange mit denselben stehenden, vorzugsweise den Namen »Abel'sche Functionen« zu geben berechtigt ist, und sie zum Hauptgegenstande der Betrachtung zu machen aufgefordert wird.

Die nächste Aufgabe, welche sich nun darbietet, betrifft die wirkliche Darstellung der im Vorstehenden definirten Grössen, sowie die Entwicklung ihrer hauptsächlichsten Eigenschaften. Sodann ist es auch erforderlich, das Integral

$$\int\left\{\frac{F(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{F(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\cdots+\frac{F(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}\right\},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, als Function von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ auszudrücken. Beide Probleme finden in der gegenwärtigen Schrift, deren Resultate ich zum Theil schon früher in zwei kleinern Abhandlungen*) bekannt gemacht habe, ihre vollständige Erledigung, und zwar auf einem Wege, welcher von dem für die Abel'schen Functionen zweier Argumente von Göpel und Rosenhain betretenen gänzlich verschieden ist. Die genannten Mathematiker gehen nämlich von unendlichen Reihen aus, die sie aus denen, durch welche Jacobi die elliptischen Functionen auszudrücken gelehrt hat, durch eine von tiefer analytischer Einsicht zeugende Verallgemeinerung erhalten, und zeigen dann, wie sich aus denselben, die zwei veränderliche Grössen u_1, u_2 enthalten, die Coefficienten einer quadratischen Gleichung so zusammensetzen lassen, dass zwischen deren Wurzeln und u_1, u_2 zwei Differential-Gleichungen von der oben aufgestellten Form bestehen. Dagegen war mein Bestreben von Anfang an auf die Auffindung einer Methode gerichtet, die geeignet sei, unmittelbar von den genannten Differential-Gleichungen aus für jeden Werth von ϱ auf einem einfachen, alle Willkürlichkeit ausschliessenden Wege zur Darstellung der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ als Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ in einer für alle Werthe der letztern gültig bleibenden Form zu führen. Durch weitere Ausbildung eines Verfahrens, dessen ich mich bereits früher zur directen Entwicklung der elliptischen Functionen, ohne Voraussetzung der Multiplications- und Transformations-Formeln, mit gutem Erfolge bedient hatte, gelang es mir, das Ziel, welches

*) S. Programm des Braunsberger Gymnasiums v. J. 1849 und Crelle's Journal Bd. 47 [S. 111 u. S. 113 dieses Bandes].

ich mir gesteckt, vollständig zu erreichen; wo sich denn als schliessliches Resultat meiner Untersuchungen ergab, dass sich sämmtliche Abel'sche Functionen einer bestimmten Ordnung auf eine einzige, in einfacher Form darstellbare Transcendente zurückführen lassen. Damit ist aber für sie dasselbe erreicht, was für die elliptischen Functionen Jacobi gethan hat, und was Lejeune Dirichlet in seiner Gedächtnissrede auf den grossen Mathematiker mit Recht als eine der bedeutendsten Leistungen desselben bezeichnet.

Die vorliegende Arbeit ist unter mancherlei äussern Hemmungen entstanden, die mir nur von Zeit zu Zeit, und oftmals nach langer Unterbrechung, mit derselben mich zu beschäftigen gestatteten. Ohne Zweifel wird man Spuren davon an nicht wenigen Stellen entdecken. Gleichwohl hoffe ich, dass ihr die Sachkundigen auch in der Gestalt, wie ich sie jetzt ihrer Beurtheilung vorlege, nicht ganz ihren Beifall versagen, und wenigstens ein Ergebniss derselben mit Befriedigung aufnehmen werden, die Thatsache nämlich, dass sich die elliptischen und die Abel'schen Functionen nach einer für alle Ordnungen gleich bleibenden und zugleich directen Methode behandeln lassen; und ich trage kein Bedenken, zu gestehen, dass ich auf dieses Resultat meiner Arbeit einigen Werth lege, und es als ein für die Wissenschaft nicht unbedeutendes betrachte.

Erstes Kapitel.

Erklärung der Abel'schen Functionen; Bestimmung der analytischen Form derselben.

§ 1.

Ich beginne mit der Ermittelung der Form, unter welcher der Zusammenhang zwischen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ und $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ dargestellt werden kann. Zuvörderst aber möge, zur Vermeidung von Wiederholungen, hier ein für allemal in Betreff einiger Bezeichnungen, die ich im Verlaufe der ganzen Abhandlung unverändert beibehalten werde, Folgendes festgestellt werden.

Die ersten Buchstaben des deutschen Alphabets, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ sollen, sobald nicht ausdrücklich etwas Anderes bestimmt wird, ausschliesslich Zahlen aus der Reihe

$$1, 2, \ldots \varrho$$

bedeuten, in der Art, dass jeder derselben, wo er in einer Formel vorkommt, unabhängig von den übrigen etwa in ihr sich findenden, sämmtliche dieser Reihe angehörigen Werthe durchlaufen kann. Ein Ausdruck, der einen oder mehrere dieser Buchstaben enthält, repräsentirt demnach, je nachdem die Zahl derselben 1, oder 2, oder 3 u. s. w ist, ϱ, oder ϱ^2, oder ϱ^3 u. s. w. Werthe. Die Summe aller dieser Werthe soll dann ferner durch ein dem Ausdrucke vorgesetztes Σ bezeichnet werden, und zwar in der Regel ohne besondere Andeutung der Buchstaben, auf welche es sich bezieht, was nur in dem Falle nicht unterbleiben darf, wenn ausser denselben noch andere deutsche Buchstaben vorkommen. Hiernach ist z. B.

$$\Sigma F(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} F(\mathfrak{a})$$

$$\Sigma F(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} F(\mathfrak{a},\mathfrak{b}).$$

Dagegen soll

$$\sum_{\mathfrak{a}} F(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} F(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$$

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} F(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c})$$

sein; u. s. w.

Kommt es in einem besondern Falle vor, dass bei einer solchen Summation ein Buchstabe von den festgesetzten Werthen irgend einen bestimmten nicht annehmen darf, so soll darauf durch ein dem Σ oben beigefügtes $(')$ aufmerksam gemacht, und zugleich der auszuschliessende Werth neben der Summenformel angegeben werden; wonach z. B. die Bedeutung der Formel

$$\sum_{\mathfrak{a}}{}' \left(\frac{1}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}\right), \quad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b})$$

klar ist.

Endlich bemerke ich noch, dass eine Gleichung, die einen, oder zwei u. s. w. der in Rede stehenden deutschen Buchstaben enthält, ein System von ϱ, oder ϱ^2 u. s. w. Gleichungen darstellt; so dass z. B. die in der Einleitung aufgestellten Differential-Gleichungen sämmtlich in der folgenden

$$du_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}} \tag{1.}$$

enthalten sind.

Dies vorausgeschickt soll nun zunächst gezeigt werden, dass sich $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ bei hinlänglich kleinen Werthen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen in convergirende Reihen entwickeln lassen.

Wenn die Differenz $x - a_\mathfrak{r}$, wo $\mathfrak{r}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho+1$ bezeichnen soll, dem absoluten Betrage*) nach kleiner ist als die Differenz zwischen $a_\mathfrak{r}$ und jeder andern der Grössen $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$ (was durch den Ausdruck »es befinde sich x in der Nähe von $a_\mathfrak{r}$« bezeichnet werden möge), so lässt sich

$$\frac{1}{\sqrt{R(x)}} \text{ durch eine convergirende Reihe von der Form}$$

$$\frac{1}{\sqrt{R'(a_\mathfrak{r})(x-a_\mathfrak{r})}} \cdot \{1 + (\mathfrak{r})_1 (x-a_\mathfrak{r}) + (\mathfrak{r})_2 (x-a_\mathfrak{r})^2 + \cdots\}$$

darstellen, wo $R'(x) = \frac{\partial R(x)}{\partial x}$, und $(\mathfrak{r})_1$, $(\mathfrak{r})_2$, u. s. w. rational aus $a_\mathfrak{r}$ und den Coefficienten von $R(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke sind.

Wird daher angenommen, es befinde sich x_1 in der Nähe von a_1, x_2 in der Nähe von a_2 u. s. w., und setzt man,

$$\frac{R(x)}{P(x)} = A_0 (x-a_{\varrho+1}) \dots (x-a_{2\varrho+1}) \text{ mit } Q(x), \qquad \frac{\partial P(x)}{\partial x} \text{ mit } P'(x)$$

bezeichnend,

$$\sqrt{\frac{P'(a_\mathfrak{a})}{Q(a_\mathfrak{a})}(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a})} = s_\mathfrak{a}, \tag{2.}$$

so hat man

$$\frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = ((\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_0 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_1 s_\mathfrak{a}^2 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_2 s_\mathfrak{a}^4 + \cdots) ds_\mathfrak{a},$$

wo $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_0$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_1$ u. s. w. rationale, aus $a_\mathfrak{a}$, $a_\mathfrak{b}$ und den Coefficienten von $P(x)$, $Q(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten, und insbesondere

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})_0 = 1, \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_0 = 0, \text{ wenn } \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b},$$

*) Unter dem absoluten Betrage oder Werthe einer complexen (imaginären) Grösse verstehe ich hier den analytischen Modul derselben, wie er sonst genannt wird. Der Umstand, dass das Wort Modul in so verschiedenem Sinne gebraucht wird, und namentlich in der Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen bereits eine feststehende Bedeutung hat, möge die Einführung der vorgeschlagenen Benennung entschuldigen.

ist. Hiernach geben die Gleichungen (1.) durch Integration

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= s_1 + S\left\{\sum_{n=1,\dots\infty} \frac{(a,1)_n}{2n+1} s_a^{2n+1}\right\},\\ u_2 &= s_2 + S\left\{\sum_{n=1,\dots\infty} \frac{(a,2)_n}{2n+1} s_a^{2n+1}\right\},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ u_\varrho &= s_\varrho + S\left\{\sum_{n=1,\dots\infty} \frac{(a,\varrho)_n}{2n+1} s_a^{2n+1}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Aus diesen Reihen erhält man dann ferner durch Umkehrung die folgenden, in denen $(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_n$ eine ganze homogene Function n^{ten} Grades von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bezeichnen soll:

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\frac{P'(a_1)}{Q(a_1)}}(x_1 - a_1) = u_1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5 + \cdots,\\ s_2 &= \sqrt{\frac{P'(a_2)}{Q(a_2)}}(x_2 - a_2) = u_2 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5 + \cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ s_\varrho &= \sqrt{\frac{P'(a_\varrho)}{Q(a_\varrho)}}(x_\varrho - a_\varrho) = u_\varrho + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5 + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Ferner, da sich

$$\frac{P(x_a)}{\sqrt{R(x_a)}} \text{ in eine Reihe von der Form}$$
$$s_a + (a)_1 s_a^3 + (a)_2 s_a^5 + \cdots$$

entwickeln lässt,

$$(5.)\qquad \frac{P(x_a)}{\sqrt{R(x_a)}} = \frac{\sqrt{R(x_a)}}{Q(x_a)} = u_a + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_5 + \cdots.$$
$$(a = 1, 2, \dots \varrho)$$

Die vorstehenden Reihen können nicht für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ convergiren, sondern nur für solche, die gewisse Bedingungen erfüllen. Es ist aber für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich, diese aufzusuchen; es genügt vielmehr anzunehmen, dass die Reihen (3.) bis (5.) für irgend welche Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, deren absolute Beträge durch $U_1, U_2, \dots U_\varrho$ bezeichnet werden mögen, sämmtlich convergent seien — wozu man nach einem

allgemeinen Satze über die Reihenentwicklungen von Functionen, die algebraischen Differential-Gleichungen genügen, berechtigt ist.*) Dann sind sie es auch unbedingt, sobald man für $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ nur solche Werthe zulässt, die dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $U_1, U_2, \dots U_\varrho$ sind, und geben unter dieser Voraussetzung

$$x_1, x_2, \dots x_\varrho, \quad \sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \dots \quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

als völlig bestimmte, eindeutige Functionen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$. Wenn man aber die vorstehenden Grössen für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ innerhalb der bezeichneten Grenzen berechnen kann, so ist durch das Abel'sche Theorem die Möglichkeit gegeben, dieses auch für beliebig grosse Werthe der genannten Veränderlichen auszuführen.

§ 2.

Um dieses nachzuweisen, nehme man statt $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ (2μ) Reihen von je ϱ solchen veränderlichen Grössen

$$(1.) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} u_1', & u_2', & \dots & u_\varrho', \\ u_1'', & u_2'', & \dots & u_\varrho'', \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(2\mu)}, & u_2^{(2\mu)}, & \dots & u_\varrho^{(2\mu)} \end{array} \right.$$

an, die keiner andern Beschränkung unterworfen sein sollen, als dass

$$u_\alpha', \quad u_\alpha'', \quad \dots \quad u_\alpha^{(2\mu)}$$

sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als U_α vorausgesetzt werden. Ferner bezeichne man, wenn $\mathfrak{m}$ eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\mu$ bedeutet, mit

$$\begin{array}{cccc} s_1^{(\mathfrak{m})}, & s_2^{(\mathfrak{m})}, & \dots & s_\varrho^{(\mathfrak{m})}, \\ x_1^{(\mathfrak{m})}, & x_2^{(\mathfrak{m})}, & \dots & x_\varrho^{(\mathfrak{m})}, \\ \sqrt{R(x_1^{(\mathfrak{m})})}, & \sqrt{R(x_2^{(\mathfrak{m})})}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho^{(\mathfrak{m})})} \end{array}$$

die Grössen, welche man für

$$\begin{array}{cccc} s_1, & s_2, & \dots & s_\varrho, \\ x_1, & x_2, & \dots & x_\varrho, \\ \sqrt{R(x_1)}, & \sqrt{R(x_2)}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho)} \end{array}$$

*) Vergl. die Abhandlung über die analytischen Facultäten in Crelle's Journal Bd. 51 [S. 75 dieses Bandes].

vermittelst der Reihen (4, 5) des vorhergehenden § erhält, wenn man dort $u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \dots u_\varrho^{(m)}$ an die Stelle von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ setzt. Sodann hat man zwei ganze Functionen $M(x)$, $N(x)$ von der Form

$$(2.) \qquad \begin{cases} M(x) = x^{\mu\varrho} + M_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + M_{\mu\varrho}, \\ N(x) = \quad N_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + N_{\mu\varrho} \end{cases}$$

vermittelst der folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen

$$(3.) \qquad \begin{cases} M(x_\alpha') \dfrac{\sqrt{R(x_\alpha')}}{Q(x_\alpha')} + N(x_\alpha') = 0, \\ M(x_\alpha'') \dfrac{\sqrt{R(x_\alpha'')}}{Q(x_\alpha'')} + N(x_\alpha'') = 0, \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \varrho) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ M(x_\alpha^{(2\mu)}) \dfrac{\sqrt{R(x_\alpha^{(2\mu)})}}{Q(x_\alpha^{(2\mu)})} + N(x_\alpha^{(2\mu)}) = 0 \end{cases}$$

zu bestimmen, worauf die ganze Function $(2\mu\varrho+\varrho)^{\text{ten}}$ Grades

$$P(x)M^2(x) - Q(x)N^2(x)$$

für $x = x_1', \dots x_\varrho', x_1'', \dots x_\varrho'', \dots x_1^{(2\mu)}, \dots x_\varrho^{(2\mu)}$ Null wird, und daher durch das Product

$$(x-x_1')\dots(x-x_\varrho')(x-x_1'')\dots(x-x_\varrho'')\dots(x-x_1^{(2\mu)})\dots(x-x_\varrho^{(2\mu)}),$$

welches durch $\Pi(x)$ bezeichnet werden möge, theilbar ist, so dass man

$$(4.) \qquad P(x)M^2(x) - Q(x)N^2(x) = \Pi(x)\varphi(x)$$

setzen kann, wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von der Form

$$x^\varrho + P_1 x^{\varrho-1} + P_2 x^{\varrho-2} + \cdots + P_\varrho$$

bedeutet, in der $P_1, P_2, \dots P_\varrho$ rational aus

$$(5.) \qquad \begin{cases} x_1', & x_2', & \dots & x_\varrho', \\ x_1'', & x_2'', & \dots & x_\varrho'', \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(2\mu)}, & x_2^{(2\mu)}, & \dots & x_\varrho^{(2\mu)}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \sqrt{R(x_1')}, & \sqrt{R(x_2')}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho')}, \\ \sqrt{R(x_1'')}, & \sqrt{R(x_2'')}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho'')}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{R(x_1^{(2\mu)})}, & \sqrt{R(x_2^{(2\mu)})}, & \dots & \sqrt{R(x_\varrho^{(2\mu)})} \end{cases}$$

zusammengesetzt, und daher auch als eindeutige Functionen der Grössen (1.) zu betrachten sind. Bezeichnet man jetzt mit $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die ϱ Wurzeln der

Gleichung

$$\varphi(x) = 0,$$

so gelten nach dem Abel'schen Theorem die ϱ Gleichungen, die sich aus der nachstehenden

$$(6.) \quad \sum_a \frac{1}{2}\left\{\frac{P(x'_a)}{x'_a - a_b}\cdot\frac{dx'_a}{\sqrt{R(x'_a)}} + \frac{P(x''_a)}{x''_a - a_b}\cdot\frac{dx''_a}{\sqrt{R(x''_a)}} + \cdots\right\} = \sum_a \frac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a - a_b}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}$$

ergeben, indem man $\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots \varrho$ setzt, unter der Bedingung, dass man der Wurzelgrösse $\sqrt{R(x_a)}$ den durch die Gleichung

$$(7.) \quad \sqrt{R(x_a)} = \frac{P(x_a)\,M(x_a)}{N(x_a)} = \frac{Q(x_a)\,N(x_a)}{M(x_a)}$$

bestimmten Werth beilege.*) Nun ist aber

$$\sum_a \frac{1}{2}\frac{P(x'_a)}{x'_a - a_b}\cdot\frac{dx'_a}{\sqrt{R(x'_a)}} = du'_b, \qquad \sum_a \frac{1}{2}\frac{P(x''_a)}{x''_a - a_b}\cdot\frac{dx''_a}{\sqrt{R(x''_a)}} = du''_b, \quad \text{u. s. w.}$$

Daher

$$(8.) \quad du'_b + du''_b + \cdots + du_b^{(2\mu)} = \sum_{a\ (\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots \varrho)} \frac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a - a_b}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}.$$

Bevor aber aus diesen Gleichungen weitere Folgerungen gezogen werden, ist es nothwendig, die Zusammensetzungsweise der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, $\varphi(x)$ aus den Grössen (5.) oder (1.) einer nähern Betrachtung zu unterwerfen.

§ 3.

Es lässt sich, wenn x in der Nähe von a_a angenommen und

$$(1.) \quad \sqrt{\frac{P'(a_a)}{Q(a_a)}(x - a_a)} = s, \qquad x = a_a + \frac{Q(a_a)}{P'(a_a)}s^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\sqrt{R(x)}}{Q(x)} \quad \text{oder} \quad \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}$$

in eine convergirende Reihe

$$(2.) \quad s + (\mathfrak{a})_1 s^3 + (\mathfrak{a})_2 s^5 + \cdots$$

*) In Betreff des Beweises dieses Satzes verweise ich auf Abel's Abhandlung: Remarques sur quelques propriétés etc. in Crelle's Journal, Bd. 3, S. 313 und Œuvres complètes, tome I, 288. Einen auf ganz andern Principien beruhenden Beweis des Satzes werde ich später geben.

entwickeln, welche mit $R_\alpha(s)$ bezeichnet werden möge, so wie auch die Functionen von s, in welche $M(x)$, $N(x)$, $P(x)$, $Q(x)$ durch die Substitution

$$x = a_\alpha + \frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} s^2$$

übergehen, durch $M_\alpha(s)$, $N_\alpha(s)$, $P_\alpha(s)$, $Q_\alpha(s)$ angedeutet werden sollen. Ferner setze man

$$(3.) \qquad \begin{cases} (s-s'_\alpha)(s-s''_\alpha)\dots(s-s_\alpha^{(2\mu)}) = \pi_\alpha(s), \\ M_\alpha(s)\,R_\alpha(s) + N_\alpha(s) = f_\alpha(s), \end{cases}$$

so kann auch $f_\alpha(s)$ für jeden Werth von s, der so beschaffen ist, dass der zugehörige Werth von x in der Nähe von a_α liegt, in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Es ist klar, dass s'_α, s''_α, u. s. w. in Folge der oben in Betreff der Grössen (1, § 2) gemachten Annahme sämmtlich zu diesen Werthen von s gehören.

Angenommen nun, es sei überhaupt $f(s)$ eine Function von s, die sich für alle Werthe dieser Veränderlichen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ein bestimmter Grenzwerth S sind, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots$$

darstellen lasse, und $\pi(s)$ bedeute eine ganze Function n^{ten} Grades, wobei zugleich angenommen werde, dass die Wurzeln der Gleichung $\pi(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als S seien. Alsdann lässt sich für jeden Werth von s, der seinem absoluten Betrage nach grösser als jede dieser Wurzeln ist,

$$\frac{1}{\pi(s)} = C_0 s^{-n} + C_1 s^{-n-1} + C_2 s^{-n-2} + \cdots = \mathrm{S}\{C_\mathfrak{m} s^{-n-\mathfrak{m}}\}_{\mathfrak{m}=0,\dots\infty}$$

setzen (wo $\mathfrak{m}$, so wie überhaupt im Folgenden die Buchstaben $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, eine ganze Zahl, die alle Werthe zwischen den Grenzen 0 und ∞ annehmen kann, bezeichnet), und man erhält daher, indem man diese Reihe mit der für $f(s)$ multiplicirt, wenn der absolute Werth von s zugleich kleiner als S ist,

$$\frac{f(s)}{\pi(s)} = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \cdots + E_0 s^{-1} + E_1 s^{-2} + \cdots,$$

welche Reihen-Entwicklung von $\frac{f(s)}{\pi(s)}$ durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$$

angedeutet werden möge, so wie durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{\pm\mathfrak{m}}}$$

der Coefficient von $s^{\pm\mathfrak{m}}$ in derselben. Ist nun

$$\pi(s) = B_0 + B_1 s + \cdots + B_n s^n,$$

so müssen, wenn man die Reihe $\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$ mit $\pi(s)$ multiplicirt, aus dem Producte alle Glieder mit negativen Potenzen von s fortfallen, und daher

$$B_0 E_{\mathfrak{m}} + B_1 E_{\mathfrak{m}+1} + \cdots + B_n E_{\mathfrak{m}+n} = 0$$

sein, indem der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung der Coefficient von $s^{-\mathfrak{m}-1}$ in dem gedachten Producte ist. Diese Relation lehrt aber, dass die Coefficienten E_0, E_1, u. s. w. sämmtlich gleich Null sind, sobald dies mit den n ersten der Fall ist. Denn da B_n nicht Null ist, so erhellt unmittelbar, dass $E_{\mathfrak{m}+n} = 0$ sein muss, wofern $E_{\mathfrak{m}}, E_{\mathfrak{m}+1}, \ldots E_{\mathfrak{m}+n-1}$ sämmtlich verschwinden; woraus, indem man der Reihe nach $\mathfrak{m} = 0, 1, 2$, u. s. w. setzt, das Behauptete sofort sich ergiebt. Dann hat man

$$\frac{f(s)}{\pi(s)} = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \cdots,$$

oder

$$f(s) = (B_0 + B_1 s + \cdots)(D_0 + D_1 s + \cdots)$$

für alle Werthe von s innerhalb der bezeichneten Grenzen. Die letztere Gleichung kann aber nicht anders bestehen, als wenn in der Reihe, die aus der Entwicklung des Products auf der rechten Seite hervorgeht, die Coefficienten mit den gleichstelligen von $f(s)$ übereinstimmen. Dann aber gilt sie, und mit ihr auch die vorhergehende, überhaupt für alle Werthe von s, bei denen die Reihen

$$A_0 + A_1 s + \cdots, \qquad D_0 + D_1 s + \cdots$$

beide convergiren. Für die letztere steht dies aber, ihrer Herleitung nach,

fest, wenn der absolute Betrag von s zwischen zwei Grenzen, von denen die obere S ist, enthalten ist; es muss daher für alle Werthe von s, die dem absoluten Betrage nach unter S liegen, der Fall sein. Hiermit ist folgender Hülfssatz bewiesen, der bei mancherlei Untersuchungen mit Nutzen angewandt werden kann:

Wenn die oben näher charakterisirten Functionen $f(s)$, $\pi(s)$ so beschaffen sind, dass man

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-2}} = 0, \quad \ldots \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-n}} = 0,$$

oder auch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{sf(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \ldots \quad \left[\frac{s^{n-1}f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0$$

hat, so lässt sich der Quotient

$$\frac{f(s)}{\pi(s)}$$

für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f(s)$ convergirt, ebenfalls durch eine nur ganze positive Potenzen von s enthaltende convergirende Reihe darstellen. Umgekehrt ist dies nicht der Fall, sobald die vorstehenden Bedingungsgleichungen nicht sämmtlich befriedigt werden.

Für die durch die Formeln (3.) definirten Functionen $f_\alpha(s)$, $\pi_\alpha(s)$ ist nun, nach dem oben Bemerkten, die Bedingung erfüllt, dass die Wurzeln der Gleichung $\pi_\alpha(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner sind als der Grenzwerth, unter dem s bleiben muss, damit die Reihe für $f_\alpha(s)$ unbedingt convergire. Wenn daher die Coefficienten von $M(x)$ und $N(x)$ so bestimmt werden können, dass die folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen

$$(4.) \qquad \left[\frac{f_\alpha(s)}{\pi_\alpha(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{sf_\alpha(s)}{\pi_\alpha(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \ldots \quad \left[\frac{s^{2\mu-1}f_\alpha(s)}{\pi_\alpha(s)}\right]_{s^{-1}} = 0,$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots \varrho)$$

befriedigt werden; so hat man für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f_\alpha(s)$ convergirt,

$$f_\alpha(s) = \pi_\alpha(s)\bar{f}_\alpha(s),$$

wo $\bar{f}_a(s)$ eine als unendliche Reihe von derselben Form wie die für $f_a(s)$ darstellbare Function bedeutet. Nun darf man aber in dieser Gleichung $(-s)$ für s setzen, und erhält

$$f_a(s)f_a(-s) = \pi_a(s)\pi_a(-s)\bar{f}_a(s)\bar{f}_a(-s),$$

oder da

$$M_a(-s) = M_a(s), \qquad N_a(-s) = N_a(s), \qquad R_a(-s) = -R_a(s)$$

ist,

$$N_a^2(s) - M_a^2(s)R_a^2(s) = \pi_a(s)\pi_a(-s)\bar{f}_a(s)\bar{f}_a(-s),$$

oder auch, indem

$$R_a^2(s) = \frac{P_a(s)}{Q_a(s)}$$

ist, durch Multiplication dieser Gleichung mit $-Q_a(s)$,

$$P_a(s)M_a^2(s) - Q_a(s)N_a^2(s) = \pi_a(s)\pi_a(-s)\chi_a(s), \tag{5.}$$

wo

$$\chi_a(s) = -Q_a(s)\bar{f}_a(s)\bar{f}_a(-s)$$

gesetzt ist. Nun gehört jeder Werth von s, der $\pi_a(s) = 0$ oder $\pi_a(-s) = 0$ macht, zu denen, für welche die Reihen-Entwicklungen von $f_a(s)$, $f_a(-s)$ und somit auch die von $\bar{f}_a(s)$, $\bar{f}_a(-s)$, $\chi_a(s)$ convergiren; es behält daher der Quotient

$$\frac{P_a(s)M_a^2(s) - Q_a(s)N_a^2(s)}{\pi_a(s)\pi_a(-s)}$$

auch dann noch einen endlichen Werth, wenn der Divisor verschwindet; und da Dividendus und Divisor desselben beide ganze Functionen von s^2 sind, so muss der erstere durch den letzteren theilbar, und somit $\chi_a(s)$ ebenfalls eine ganze Function von s^2 sein. Daraus folgt denn, dass die Gleichung (5.) für jeden Werth von s besteht. Setzt man nun in derselben

$$\frac{P'(a_a)}{Q(a_a)}(x - a_a) \text{ für } s^2,$$

so geht der Ausdruck auf der linken Seite in

$$P(x)M^2(x) - Q(x)N^2(x),$$

und

$$\pi_a(s)\pi_a(-s) = (s^2 - s_a'^2)(s^2 - s_a''^2)\ldots,$$

abgesehen von einem constanten Factor, in

$$(x-x_a')(x-x_a'')\dots(x-x_a^{(2\mu)})$$

über, während sich $\chi_a(s)$ ebenfalls in eine ganze Function von x verwandelt. Demnach wird, wenn die Gleichungen (4.) sämmtlich bestehen, der Ausdruck

$$P(x)M^2(x)-Q(x)N^2(x) \text{ durch } \Pi(x)$$

theilbar, und es gilt die Gleichung (4.) des § 2. Die Anzahl dieser Gleichungen ist aber $(2\mu\varrho)$, d. h. gleich der Anzahl der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, und sie werden daher zur Bestimmung der letzteren hinreichen.

Nun hat die Reihe

$$\left[\frac{1}{\pi_a(s)}\right] \text{ die Form}$$

$$(6.) \qquad s^{-2\mu}(1+\sigma_{a,1}s^{-1}+\sigma_{a,2}s^{-2}+\cdots) = \mathrm{S}_{\mathfrak{n}=0,\dots\infty}\{\sigma_{a,\mathfrak{n}}s^{-2\mu-\mathfrak{n}}\},$$

wo $\sigma_{a,\mathfrak{n}}$ eine ganze homogene und symmetrische Function $\mathfrak{n}^{\text{ten}}$ Grades von

$$s_a', \quad s_a'', \quad \dots \quad s_a^{(2\mu)}$$

bedeutet. Setzt man daher

$$(7.) \qquad f_a(s) = F_{a,0}+F_{a,1}s+F_{a,2}s^2+\cdots = \mathrm{S}_{\mathfrak{m}=0,\dots\infty}F_{a,\mathfrak{m}}s^{\mathfrak{m}},$$

wo die Ausdrücke $F_{a,0}$, $F_{a,1}$ u. s. w. lineare Functionen von

$$\begin{matrix} M_1, & M_2, & \dots & M_{\mu\varrho}, \\ N_1, & N_2, & \dots & N_{\mu\varrho} \end{matrix}$$

sind, mit Coefficienten, die rational aus a_a und den Coefficienten von $P(x)$ und $R(x)$ zusammengesetzt werden, so wird

$$(8.) \qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_a(s)}{\pi_a(s)}\right] = \mathrm{S}_{\mathfrak{m}=0,\dots\infty,\ \mathfrak{n}=0,\dots\infty}\{\sigma_{a,\mathfrak{n}}F_{a,\mathfrak{m}}s^{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}-\mathfrak{p}-1}\},$$

$$(9.) \qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_a(s)}{\pi_a(s)}\right]_{s^{-1}} = \mathrm{S}_{\mathfrak{n}=0,\dots\infty}\{\sigma_{a,\mathfrak{n}}F_{a,\mathfrak{p}+\mathfrak{n}}\},$$

und man erhält demnach, indem man $\mathfrak{p}=0, 1, \dots 2\mu-1$ setzt, zur Bestimmung der Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$ die $(2\mu\varrho)$ Gleichungen, welche durch

die folgende

$$(10.) \qquad F_{\alpha,\beta} + \mathrm{S}\{\sigma_{\alpha,n} F_{\alpha,\beta+n}\} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \dots \varrho \\ \beta = 0, 1, \dots 2\mu-1\end{pmatrix}$$
$$n = 1, \dots \infty$$

repräsentirt werden. Diese kann man durch Zusammenziehung der Glieder, welche dieselbe Unbekannte enthalten, auf die Form

$$(11.) \qquad \begin{aligned}(\alpha,\beta)_0 + (\alpha,\beta)_1 M_1 + \cdots + (\alpha,\beta)_{\mu\varrho} M_{\mu\varrho} \\ + (\alpha,\beta)_{\mu\varrho+1} N_1 + \cdots + (\alpha,\beta)_{2\mu\varrho} N_{\mu\varrho} = 0\end{aligned}$$

bringen, wo die Ausdrücke $(\alpha,\beta)_0$, $(\alpha,\beta)_1$ u. s. w. sämmtlich Reihen von der Form

$$g_0 + g_1 \sigma_{\alpha,1} + g_2 \sigma_{\alpha,2} + \cdots$$

sind. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{M}_m$ die Determinante des Systems, welches aus dem folgenden

$$(12.) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} {\scriptstyle (0)} & {\scriptstyle (1)} & \cdots & {\scriptstyle (2\mu\varrho)} \\ (1,0)_0 & (1,0)_1 & \cdots & (1,0)_{2\mu\varrho} \\ (1,1)_0 & (1,1)_1 & \cdots & (1,1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1,2\mu-1)_0 & (1,2\mu-1)_1 & \cdots & (1,2\mu-1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varrho,0)_0 & (\varrho,0)_1 & \cdots & (\varrho,0)_{2\mu\varrho} \\ (\varrho,1)_0 & (\varrho,1)_1 & \cdots & (\varrho,1)_{2\mu\varrho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varrho,2\mu-1)_0 & (\varrho,2\mu-1)_1 & \cdots & (\varrho,2\mu-1)_{2\mu\varrho} \end{array} \right\}$$

dadurch sich ergiebt, dass man die mit (m) bezeichnete Vertikal-Reihe fortlässt, und zugleich die darauf folgenden, ohne ihre Aufeinanderfolge zu ändern, vor die mit (0) überschriebenen setzt; so erhält man

$$(13.) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} M_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_0}, & M_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_0}, & \cdots & M_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0}, \\ N_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+1}}{\mathfrak{M}_0}, & N_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+2}}{\mathfrak{M}_0}, & \cdots & N_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{2\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0}, \end{array} \right.$$

wo $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, u. s. w. als rationale und ganze aus $(\alpha,\beta)_0$, $(\alpha,\beta)_1$ u. s. w. gebildete Ausdrücke gleich den letztern nach ganzen positiven Potenzen der

Grössen

$$(14.) \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} s_1', & s_2', & \dots & s_\varrho' \\ s_1'', & s_2'', & \dots & s_\varrho'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1^{(2\mu)}, & s_2^{(2\mu)}, & \dots & s_\varrho^{(2\mu)} \end{array} \right.$$

in convergirende Reihen entwickelt werden können.*) Hier ist es nun von besonderer Wichtigkeit, die Anfangsglieder dieser Reihen, d. h. die Werthe, welche sie annehmen, wenn die Grössen (14.) sämmtlich verschwinden, zu ermitteln. Offenbar erhält man dieselben, die mit

$$\mathring{\mathfrak{M}}_0, \quad \mathring{\mathfrak{M}}_1, \quad \dots \quad \mathring{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho}$$

bezeichnet werden mögen, wenn man bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. die Reihen für $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_1$ u. s. w. auf ihre Anfangsglieder reducirt, oder, was dasselbe ist, wenn man die Gleichungen (11.), die mit den unter (10.) aufgestellten identisch sind, durch die folgenden ersetzt:

$$(15.) \qquad F_{\mathfrak{a},0} = 0, \quad F_{\mathfrak{a},1} = 0, \quad \dots \quad F_{\mathfrak{a},2\mu-1} = 0, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots \varrho)$$

und dann aus den Coefficienten derselben $\mathring{\mathfrak{M}}_0$, $\mathring{\mathfrak{M}}_1$ u. s. w. so zusammensetzt, wie $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. aus den Coefficienten der Gleichungen (11.).

Nun sind aber $F_{\mathfrak{a},0}$, $F_{\mathfrak{a},1}$ u. s. w. die Coefficienten der Reihen-Entwicklung von

$$f_{\mathfrak{a}}(s) = M_{\mathfrak{a}}(s) R_{\mathfrak{a}}(s) + N_{\mathfrak{a}}(s),$$

und die Gleichungen (15.) drücken also aus, dass die (2μ) ersten Glieder derselben verschwinden sollen. Dies kann, da $N_{\mathfrak{a}}(s)$ und $M_{\mathfrak{a}}(s)$ gerade Functionen von s sind, $R_{\mathfrak{a}}(s)$ aber eine ungerade, in deren Entwicklung der Coefficient von s^1 nicht Null ist, nur unter der Bedingung geschehen, dass in den Entwicklungen von $M_{\mathfrak{a}}(s)$ und $N_{\mathfrak{a}}(s)$ nach Potenzen von s alle Glieder von einer niedrigern als der $(2\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden. Da aber $M_{\mathfrak{a}}(s)$ und $N_{\mathfrak{a}}(s)$ aus $M(x)$ und $N(x)$ durch die Substitution

$$x = a_{\mathfrak{a}} + \frac{P'(a_{\mathfrak{a}})}{Q(a_{\mathfrak{a}})} s^2$$

*) Vergl. den Satz (5, B, § 7) in der angeführten Abhandlung über die Facultäten.

hervorgehn, so muss man, damit die genannten Glieder Null werden,

$$\begin{aligned} M(a_a) &= 0, \quad M'(a_a) = 0, \quad \ldots \quad M^{(\mu-1)}(a_a) = 0, \\ N(a_a) &= 0, \quad N'(a_a) = 0, \quad \ldots \quad N^{(\mu-1)}(a_a) = 0 \end{aligned}$$

haben, d. h. es müssen $M(x)$, $N(x)$ beide durch $(x-a_a)^\mu$ theilbar sein. Hiernach sagen die Gleichungen (15.) aus, es sollen die Coefficienten von $M(x)$ und $N(x)$ so bestimmt werden, dass beide durch

$$(x-a_1)^\mu (x-a_2)^\mu \ldots (x-a_\varrho)^\mu = P^\mu(x)$$

theilbar werden. Dies kann aber, da $M(x)$ vom $(\mu\varrho)^{\text{ten}}$, $N(x)$ vom $(\mu\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade, und der Coefficient von $x^{\mu\varrho}$ in $M(x)$ der Einheit gleich sein soll, nicht anders geschehen, als wenn man

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \quad \ldots \quad N_{\mu\varrho} = 0,$$

und

$$M(x) = P^\mu(x)$$

annimmt. Hiernach liefern die Gleichungen (15.) für M_1, N_1, M_2, N_2 u. s. w. völlig bestimmte endliche Werthe. Daraus folgt zunächst, dass $\mathring{\mathfrak{M}}_0$ oder das Anfangsglied von $\mathfrak{M}_0$ nicht Null sein kann, indem, wenn dieses der Fall wäre, die Gleichungen (15.) entweder gar nicht, oder auf mehr als eine Weise befriedigt werden könnten; und daher ergiebt sich

$$(16.) \qquad \begin{cases} \mathring{\mathfrak{M}}_0 x^{\mu\varrho} + \mathring{\mathfrak{M}}_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + \mathring{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho} = \mathring{\mathfrak{M}}_0 P^\mu(x), \\ \mathring{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+1} = \mathring{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+2} = \cdots = \mathring{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho} = 0. \end{cases}$$

Mithin kann man, wenn man

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{\mathring{\mathfrak{M}}_0} = M_0$$

setzt, $M(x)$ und $N(x)$ auf die Form

$$(17.) \qquad \begin{cases} M(x) = P^\mu(x) + \dfrac{\mathfrak{M}(x)}{M_0}, \\ N(x) = \dfrac{\mathfrak{N}(x)}{M_0} \end{cases}$$

bringen, wo jetzt $\mathfrak{M}(x)$, $\mathfrak{N}(x)$ ganze Functionen des $(\mu\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von x bedeuten, deren Coefficienten sich gleichwie M_0 nach ganzen positiven Po-

tenzen der Grössen (14.) in convergirende Reihen entwickeln lassen. Dabei reducirt sich M_0 auf die Einheit, wenn diese Grössen sämmtlich den Werth Null annehmen, während die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ und $\mathfrak{N}(x)$ dann ebenfalls sämmtlich verschwinden.

Hierzu bemerke ich noch Folgendes. Die Formel (7.) lehrt, indem

$$f_\alpha(s) = M_\alpha(s) R_\alpha(s) + N_\alpha(s),$$

und $N_\alpha(s)$ eine gerade, $M_\alpha(s) R_\alpha(s)$ eine ungerade Function von s ist, dass für einen geraden Werth von $\mathfrak{m}$

$$F_{\alpha,\mathfrak{m}} \text{ die Form } f_1 N_1 + f_2 N_2 + \cdots + f_{\mu\varrho} N_{\mu\varrho},$$

und für einen ungeraden

$$F_{\alpha,\mathfrak{m}} \text{ die Form } f_0 + f_1 M_1 + f_2 M_2 + \cdots + f_{\mu\varrho} M_{\mu\varrho}$$

hat. Ferner ist $\sigma_{\alpha,\mathfrak{n}}$ eine gerade oder ungerade Function von $s'_\alpha, s''_\alpha, \ldots s_\alpha^{(2\mu)}$ jenachdem $\mathfrak{n}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Aus der Gleichung (10.) folgt daher, dass

$$(\alpha, \mathfrak{p})_0, \quad (\alpha, \mathfrak{p})_1, \quad \ldots \quad (\alpha, \mathfrak{p})_{\mu\varrho} \quad \text{gerade},$$

und

$$(\alpha, \mathfrak{p})_{\mu\varrho+1}, \quad (\alpha, \mathfrak{p})_{\mu\varrho+2}, \quad \ldots \quad (\alpha, \mathfrak{p})_{2\mu\varrho} \quad \text{ungerade}$$

Functionen der eben genannten Grössen sind, wenn $\mathfrak{p}$ eine ungerade Zahl ist; dass sich dies aber umgekehrt verhält, sobald $\mathfrak{p}$ gerade ist. Es ändert sich also jeder Coefficient der Gleichungen (11.) gar nicht, oder wechselt nur sein Zeichen, wenn man $s'_\alpha, s''_\alpha, \ldots s_\alpha^{(2\mu)}$ in

$$-s'_\alpha, \quad -s''_\alpha, \quad \ldots \quad -s_\alpha^{(2\mu}$$

verwandelt; und zwar geht dadurch, wenn man mit

$$\overline{\mathfrak{m}} \text{ die Zahl } 0 \text{ oder } 1$$

bezeichnet, je nachdem $\mathfrak{m} \leqq \mu\varrho$ oder $\mathfrak{m} > \mu\varrho$ ist,

$$(\alpha, \mathfrak{p})_\mathfrak{m} \quad \text{in} \quad (-1)^{\mathfrak{p}-1+\overline{\mathfrak{m}}} (\alpha, \mathfrak{p})_\mathfrak{m}$$

über. Der Ausdruck $\mathfrak{M}_\mathfrak{m}$ ist nun ein Aggregat von Gliedern, deren jedes die Form

$$\pm (\alpha_1, \mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{m}_1} (\alpha_2, \mathfrak{p}_2)_{\mathfrak{m}_2} \cdots (\alpha_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda)_{\mathfrak{m}_\lambda}$$

hat, wo $\lambda = 2\mu\varrho$ ist und die Reihe der Indices $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots \mathfrak{m}_\lambda$ sämmtliche Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots 2\mu\varrho$ enthält, mit Ausnahme von $\mathfrak{m}$, während für

$$\alpha_1, \mathfrak{p}_1 \quad \alpha_2, \mathfrak{p}_2 \quad \ldots \quad \alpha_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda$$

die in der folgenden Zusammenstellung enthaltenen Verbindungen zu setzen sind:

$$\begin{array}{llll} 1,0 & 1,1 & \ldots & 1, 2\mu-1, \\ 2,0 & 2,1 & \ldots & 2, 2\mu-1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho,0 & \varrho,1 & \ldots & \varrho, 2\mu-1. \end{array}$$

Giebt man daher jeder der unter (14.) zusammengestellten Grössen den entgegengesetzten Werth, so erfährt das vorstehende Product dadurch dieselbe Veränderung als wenn es mit

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\mathfrak{p}_2-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda}$$

multiplicirt wird. Aber

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda &= \varrho(0+1+2+\cdots+(2\mu-1)) = \mu\varrho(2\mu-1), \\ \overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda &= \overline{0}+\overline{1}+\cdots+\overline{(2\mu\varrho)}-\overline{\mathfrak{m}} = \mu\varrho-\overline{\mathfrak{m}}, \end{aligned}$$

und daher

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda} = (-1)^{2\mu\varrho(\mu-1)-\overline{\mathfrak{m}}} = (-1)^{\overline{\mathfrak{m}}}.$$

Man sieht also, dass die Glieder von $\mathfrak{M}_\mathfrak{m}$ nach der Zeichenänderung der Grössen (14.) sämmtlich unverändert bleiben, wenn $\mathfrak{m} \leqq \mu\varrho$, und nur ihr Zeichen wechseln, wenn $\mathfrak{m} > \mu\varrho$; d. h. mit andern Worten, dass

$$\mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{M}_1, \quad \ldots \quad \mathfrak{M}_{\mu\varrho}$$

und somit auch M_0 und die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ gerade, dagegen die Coefficienten von $\mathfrak{N}(x)$ ungerade Functionen der genannten Grössen sind.

Hierdurch ist nun die Zusammensetzungsweise der Functionen $M(x)$, $N(x)$ für den vorliegenden Zweck hinlänglich festgestellt. Aus denselben kann man ferner die Function $\varphi(x)$ leicht erhalten.

Da der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (4, § 2) durch $\Pi(x)$ theilbar ist, $\Pi(x)$ aber die Form

$$x^{2\mu\varrho} + \mathfrak{P}_1 x^{2\mu\varrho-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{2\mu\varrho}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ u. s. w. ganze Functionen von x_1', x_1'' u. s. w. und somit auch der Quadrate von s_1', s_2'' u. s. w. sind, von denen, nachdem man den gedachten Ausdruck durch $\Pi(x)$ dividirt, in dem Quotienten nur ganze positive Potenzen vorkommen; so sieht man, dass man

$$\varphi(x) = x^\varrho + \frac{P^{(1)}}{M_0^2} x^{\varrho-1} + \frac{P^{(2)}}{M_0^2} x^{\varrho-2} + \cdots + \frac{P^{(\varrho)}}{M_0^2} \tag{18.}$$

erhalten muss, wo $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ... $P^{(\varrho)}$ ganz dieselbe Gestalt haben wie die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$.

Man kann aber dieser Function noch eine andere, sehr bemerkenswerthe Form geben. Setzt man nämlich in der Gleichung (4, § 2)

$$x = a_\alpha, \quad a_{\varrho+\alpha}, \quad a_{2\varrho+1},$$

so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)} &= \frac{N^2(a_\alpha)}{\Pi(a_\alpha)} = \frac{\mathfrak{N}^2(a_\alpha)}{M_0^2\,\Pi(a_\alpha)}, \\ \frac{\varphi(a_{\varrho+\alpha})}{P(a_{\varrho+\alpha})} &= \frac{M^2(a_{\varrho+\alpha})}{\Pi(a_{\varrho+\alpha})} = \frac{(M_0 P^\mu(a_{\varrho+\alpha}) + \mathfrak{M}(a_{\varrho+\alpha}))^2}{M_0^2\,\Pi(a_{\varrho+\alpha})}, \\ \frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})} &= \frac{M^2(a_{2\varrho+1})}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \frac{(M_0 P^\mu(a_{2\varrho+1}) + \mathfrak{M}(a_{2\varrho+1}))^2}{M_0^2\,\Pi(a_{2\varrho+1})}. \end{aligned}\right. \tag{19.}$$

Nun ist

$$\frac{1}{(a_\alpha - x_\alpha')(a_\alpha - x_\alpha'')\ldots(a_\alpha - x_\alpha^{(2\mu)})} = \left\{\left(\frac{P'(a_\alpha)}{Q(a_\alpha)}\right)^\mu \cdot \frac{1}{s_\alpha' s_\alpha'' \ldots s_\alpha^{(2\mu)}}\right\}^2,$$

und, wenn $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ verschieden,

$$\frac{1}{(a_\alpha - x_\mathfrak{b}')(a_\alpha - x_\mathfrak{b}'')\ldots(a_\alpha - x_\mathfrak{b}^{(2\mu)})} = \left\{\left(\frac{1}{a_\alpha - a_\mathfrak{b}}\right)^\mu \left(1 - \frac{x_\mathfrak{b}' - a_\mathfrak{b}}{a_\alpha - a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}} \ldots \left(1 - \frac{x_\mathfrak{b}^{(2\mu)} - a_\mathfrak{b}}{a_\alpha - a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^2.$$

Aber

$$\left(1 - \frac{x_\mathfrak{b}' - a_\mathfrak{b}}{a_\alpha - a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \left(1 - \frac{x_\mathfrak{b}'' - a_\mathfrak{b}}{a_\alpha - a_\mathfrak{b}}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ u. s. w.}$$

sind, weil $x_\mathfrak{b}'$, $x_\mathfrak{b}''$ u. s. w. sämmtlich in der Nähe von $a_\mathfrak{b}$ sich befinden, nach ganzen positiven Potenzen von $(x_\mathfrak{b}' - a_\mathfrak{b})$, $(x_\mathfrak{b}'' - a_\mathfrak{b})$ u. s. w., und somit auch von $s_\mathfrak{b}'^2$, $s_\mathfrak{b}''^2$ u. s. w. in convergirende Reihen entwickelbar. Folglich kann man

$$\frac{1}{\Pi(a_\alpha)} = \frac{1}{Q^{2\mu}(a_\alpha)} \left(\frac{S_\alpha}{s_\alpha' s_\alpha'' \ldots s_\alpha^{(2\mu)}}\right)^2$$

setzen, wo S_a eine convergirende, nur ganze positive und gerade Potenzen der Grössen (14.) enthaltende Reihe bedeutet. In ähnlicher Weise findet man

$$\frac{1}{\Pi(a_{\varrho+a})} = \frac{S_{\varrho+a}^2}{P^{2\mu}(a_{\varrho+a})}, \qquad \frac{1}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \frac{S_{2\varrho+1}^2}{P^{2\mu}(a_{2\varrho+1})},$$

wo $S_{\varrho+a}$, $S_{2\varrho+1}$ Reihen von ähnlicher Gestalt wie S_a bedeuten.

Aus (19.) ergiebt sich nun

$$\frac{\varphi(a_a)}{-Q(a_a)} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_a)S_a}{Q^\mu(a_a)s'_a \dots s_a^{(2\mu)}M_0}\right)^2,$$

und aus (18.)

$$\frac{\varphi(a_a)}{-Q(a_a)} = \frac{\varphi^{(a)}}{M_0^2},$$

wo $\varphi^{(a)}$ eine nur ganze positive Potenzen von s'_1, s''_1, u. s. w. enthaltende Reihe bezeichnet. Mithin muss

$$\varphi^{(a)} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_a)S_a}{Q^\mu(a_a)s'_a \dots s_a^{(2\mu)}}\right)^2,$$

und daher $\mathfrak{N}(a_a)S_a$ durch $s'_a \dots s_a^{(2\mu)}$ theilbar sein. Bemerkt man nun, dass $\mathfrak{N}(a_a)$ eine ungerade, S_a, $(s'_a \dots s_a^{(2\mu)})$, M_0, $\mathfrak{M}(a_{\varrho+a})$, $\mathfrak{M}(a_{2\varrho+1})$ aber gerade Functionen der Grössen (14.) sind, so erkennt man, dass man

$$(20.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\varphi(a_a)}{-Q(a_a)} = \left\{\dfrac{S_1^{(a)}+S_3^{(a)}+\dots+S_{2m-1}^{(a)}+\dots}{1+S_2^{(0)}+\dots+S_{2m}^{(0)}+\dots}\right\}^2 = \varphi_a^2, \\ \dfrac{\varphi(a_{\varrho+a})}{P(a_{\varrho+a})} = \left\{\dfrac{S_0^{(\varrho+a)}+S_2^{(\varrho+a)}+\dots+S_{2m}^{(\varrho+a)}+\dots}{1+S_2^{(a)}+\dots+S_{2m}^{(0)}+\dots}\right\}^2 = \varphi_{\varrho+a}^2, \\ \dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})} = \left\{\dfrac{S_0^{(2\varrho+1)}+S_2^{(2\varrho+1)}+\dots+S_{2m}^{(2\varrho+1)}+\dots}{1+S_2^{(0)}+\dots+S_{2m}^{(0)}+\dots}\right\}^2 = \varphi_{2\varrho+1}^2 \end{array}\right.$$

hat, wo $S_m^{(\pi)}$ eine ganze homogene Function m^{ten} Grades der Grössen

$$(21.)\quad \left\{\begin{array}{llll} s'_1, & s''_1, & \dots & s_1^{(2\mu)} \\ s'_2, & s''_2, & \dots & s_2^{(2\mu)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s'_\varrho, & s''_\varrho, & \dots & s_\varrho^{(2\mu)} \end{array}\right.$$

bezeichnen soll. Es ist aber

$$(22.)\quad \frac{\varphi(x)}{P(x)} = 1 + \Sigma \frac{\varphi(a_a)}{(x-a_a)P'(a_a)};$$

und so erhält man

$$\varphi(x) = P(x) - \Sigma\left\{\frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} \cdot \frac{P(x)}{x-a_\alpha}\,\varphi_\alpha^2\right\}. \tag{23.}$$

Drückt man nun die Grössen (21.) durch die folgenden

$$\left\{\begin{array}{llll} u_1', & u_1'', & \ldots & u_1^{(2\mu)} \\ u_2', & u_2'', & \ldots & u_2^{(2\mu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_\varrho', & u_\varrho'', & \ldots & u_\varrho^{(2\mu)} \end{array}\right. \tag{24.}$$

aus (vermittelst der Formeln (4.) des § 1), so erhält man

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi_\alpha = \sqrt{\dfrac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)}} = \dfrac{U_1^{(\alpha)} + U_3^{(\alpha)} + \cdots + U_{2m-1}^{(\alpha)} + \cdots}{1 + U_2^{(0)} + \cdots + U_{2m}^{(\alpha)} + \cdots}, \\ \varphi_{\varrho+\alpha} = \sqrt{\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\alpha})}{P(a_{\varrho+\alpha})}} = \dfrac{U_0^{(\varrho+\alpha)} + U_2^{(\varrho+\alpha)} + \cdots + U_{2m}^{(\varrho+\alpha)} + \cdots}{1 + U_2^{(0)} + \cdots + U_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ \varphi_{2\varrho+1} = \sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}} = \dfrac{U_0^{(2\varrho+1)} + U_2^{(2\varrho+1)} + \cdots + U_{2m}^{(2\varrho+1)} + \cdots}{1 + U_2^{(0)} + \cdots + U_{2m}^{(0)} + \cdots}, \end{array}\right. \tag{25.}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} M(x) = P^\mu(x) + \dfrac{U_2(x) + \cdots + U_{2m}(x) + \cdots}{1 + U_2^{(0)} + \cdots + U_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ N(x) = \qquad\quad \dfrac{U_1(x) + \cdots + U_{2m+1}(x) + \cdots}{1 + U_2^{(0)} + \cdots + U_{2m}^{(0)} + \cdots}, \end{array}\right. \tag{26.}$$

wo jetzt $U_m^{(\varkappa)}$, $U_m(x)$ ganze homogene Functionen m^{ten} Grades der Grössen (24.) sind, die zweite aber zugleich auch eine ganze Function ($(\mu\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades) von x ist, und sämmtliche in diesen Ausdrücken vorkommenden unendlichen Reihen unbedingt convergiren, sobald die absoluten Werthe der genannten Veränderlichen unterhalb der oben für sie festgesetzten Grenzen liegen.*)

---

*) Wenn $F(s_1, s_2, \ldots)$ eine Function mehrerer veränderlichen Grössen $s_1, s_2, \ldots$ ist, die für alle Werthe derselben, die ihrem absoluten Betrage nach unter gewissen Grenzwerthen $S_1, S_2, \ldots$ liegen, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$\mathrm{S}\left\{A(n_1, n_2, \ldots)\, s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots\right\}$$
$$n_1 = 0, \ldots \infty,\ n_2 = 0, \ldots \infty,\ \ldots$$

dargestellt werden kann; und man substituirt für $s_1, s_2, \ldots$ ebenso gebildete Potenz-Reihen beliebig vieler anderer Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots$, und ordnet nach Potenzen dieser letztern; so convergirt die so sich ergebende Reihe, sobald man für die absoluten Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ solche Grenzen festsetzt, dass nicht nur die Reihen für $s_1, s_2, \ldots$ sämmtlich convergent sind, sondern ihre Summen auch zu denjenigen Werthen von $s_1, s_2, \ldots$ gehören, für welche die angegebene Darstellung von $F(s_1, s_2, \ldots)$ gültig ist.

Dabei kann man bemerken, dass die Coefficienten von $U_m^{(v)}$ und $U_m(x)$ aus $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ und den Coefficienten von $Q(x)$ rational zusammengesetzt sind, wie man leicht sieht, wenn man die vorhergehenden Entwicklungen in dieser Beziehung überblickt.

§ 4.

Nachdem nun ermittelt worden, welche Gestalt die Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, $\varphi(x)$, als Functionen von u_1', u_1'' u. s. w. betrachtet, haben,*) kehre ich zu den Gleichungen (8.) des § 2 zurück.

Wenn die Grössen (1.) des § 2 sämmtlich verschwinden, so reduciren sich, nach den Formeln (25, § 3), $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ ebenfalls sämmtlich auf Null, und daher (nach (23.) desselben §) $\varphi(x)$ auf $P(x)$, sodass alsdann $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ erhalten. Man kann daher $x_\alpha - a_\alpha$, $\sqrt{R(x_\alpha)}$ — die letztere Grösse mit Hülfe der Formel (7, § 2) — bei hinlänglich kleinen Werthen der genannten Veränderlichen nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln, die gleichzeitig mit ihnen verschwinden, und $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ als in der Nähe beziehlich von $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ liegend betrachten. Dann aber führen die Gleichungen (8, § 2), indem man ganz denselben Weg verfolgt wie bei den Entwicklungen des § 1, und wieder

$$\sqrt{\frac{P'(a_\alpha)}{Q(a_\alpha)}(x_\alpha - a_\alpha)} = s_\alpha$$

setzt, zu den folgenden:

$$u_\beta' + u_\beta'' + \dots + u_\beta^{(2\mu)} = s_\beta + S\left\{\sum_{\substack{\alpha \\ n=1,\dots\infty}} \frac{(\alpha,\beta)_n}{2n+1} s_\alpha^{2n+1}\right\} \qquad (\beta = 1, \dots \varrho),$$

$$\frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{Q(x_\alpha)} = s_\alpha + (\alpha)_1 s_\alpha^3 + \dots,$$

*) Wenn man die in Rede stehenden Grössen direct durch Auflösung der Gleichungen (3, § 2) bestimmen, und in den so sich ergebenden Formeln $x_1', x_1'', \dots, \sqrt{R(x_1')}, \sqrt{R(x_1'')}, \dots$ durch $u_1', u_1'', \dots$ ausdrücken wollte, so würden sie die Gestalt von Brüchen erhalten, bei denen Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, sobald man in zweien oder mehreren der unter (1, § 2) aufgestellten Reihen die gleichstelligen Glieder einander gleich setzte. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, der sich schon bei Anwendung des Abel'schen Theorems zur Herleitung der sog. Additions-Formeln für die elliptischen Functionen zeigt, ist das im vorhergehenden § auseinandergesetzte, allerdings etwas umständliche Verfahren gewählt worden. Übrigens lassen sich die Gleichungen (3, § 2), auch ohne $\sqrt{R(x_1')}, \sqrt{R(x_1'')}, \dots$ in unendliche Reihen aufzulösen, so umformen, dass derselbe Zweck erreicht wird, was namentlich in dem besonders wichtigen Falle, wo $\mu = 1$ ist, keine Schwierigkeit macht.

und man sieht daher, dass man, unter der Voraussetzung, es seien nicht nur $u'_\mathfrak{a}, u''_\mathfrak{a}, \ldots u^{(2\mu)}_\mathfrak{a}$, sondern auch $u'_\mathfrak{a}+u''_\mathfrak{a}+\cdots+u^{(2\mu)}_\mathfrak{a}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $U_\mathfrak{a}$, durch Auflösung der Gleichung $\varphi(x)=0$ und Anwendung der Formel (7, § 2) zu denselben Werthen von $x_1, x_2, \ldots x_\varrho, \sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$ gelangen muss, die man für diese Grössen vermittelst der Formeln (4, 5, § 1) erhält, wenn man in diesen

$$\begin{array}{lll} u'_1+u''_1+\cdots+u^{(2\mu)}_1 & \text{an die Stelle von} & u_1, \\ u'_2+u''_2+\cdots+u^{(2\mu)}_2 & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & u_2, \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u'_\varrho+u''_\varrho+\cdots+u^{(2\mu)}_\varrho & \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} \quad \text{-} & u_\varrho \end{array}$$

setzt. Aus den soeben angeführten Formeln erhält man ferner

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{(a_\mathfrak{a}-x_1)(a_\mathfrak{a}-x_2)\ldots(a_\mathfrak{a}-x_\varrho)}{-Q(a_\mathfrak{a})}} \\ = u_\mathfrak{a}+(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)^{(\mathfrak{a})}_3+\cdots+(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)^{(\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}-1}+\cdots, \\ \sqrt{\dfrac{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_2)\ldots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_\varrho)}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} \\ = 1+(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)^{(\varrho+\mathfrak{a})}_2+\cdots+(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)^{(\varrho+\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}}+\cdots, \\ \sqrt{\dfrac{(a_{2\varrho+1}-x_1)(a_{2\varrho+1}-x_2)\ldots(a_{2\varrho+1}-x_\varrho)}{P(a_{2\varrho+1})}} \\ = 1+(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)^{(2\varrho+1)}_2+\cdots+(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)^{(2\varrho+1)}_{2\mathfrak{m}}+\cdots, \end{array}\right.$$

wo wieder $(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)^{(\mathfrak{r})}_\mathfrak{m}$ eine homogene ganze Function $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Grades von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ bedeutet, deren Coefficienten aus denen von $Q(x)$ und aus $a_1, a_2, \ldots a_\varrho$ rational zusammengesetzt sind. Macht man nun in diesen Ausdrücken die angegebene Substitution, so ersieht man aus der Vergleichung der so hervorgehenden Formeln mit den unter (25.) des vorhergehenden § aufgestellten, wenn man die letztern nach Potenzen von u'_1, u''_1, u. s. w. sich entwickelt denkt, dass

$$U^{(\mathfrak{a})}_1 = \pm(u'_\mathfrak{a}+u''_\mathfrak{a}+\cdots+u^{(2\mu)}_\mathfrak{a}), \qquad U^{(\varrho+\mathfrak{a})}_0 = \pm 1, \qquad U^{(2\varrho+1)}_0 = \pm 1$$

sein muss. Setzt man nun fest, es solle jeder der Wurzelgrössen

$$\sqrt{\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})}}, \qquad \sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}}, \qquad \sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}}$$

von den beiden Werthen, die sie haben kann, derjenige beigelegt werden,

bei dem in den vorstehenden Formeln die obern Zeichen gelten, so sind dieselben jetzt als völlig bestimmte eindeutige Functionen von u_1', u_1'' u. s. w. zu betrachten, welche bei hinlänglich kleinen Werthen dieser Veränderlichen mit den unter (1.) aufgestellten übereinstimmen, wofern man in den letztern

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1' + u_1'' + \cdots + u_1^{(2\mu)}, \\ u_2 &= u_2' + u_2'' + \cdots + u_2^{(2\mu)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\varrho &= u_\varrho' + u_\varrho'' + \cdots + u_\varrho^{(2\mu)} \end{aligned}$$

setzt.

Angenommen nun, man habe für die absoluten Werthe der veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ irgend welche Grenzen $T_1, T_2, \ldots T_\varrho$, die sie nicht überschreiten sollen, festgestellt, so kann man die Zahl μ so gross annehmen, dass

$$T_1 < 2\mu U_1, \quad T_2 < 2\mu U_2, \quad \ldots \quad T_\varrho < 2\mu U_\varrho.$$

Dann darf man

$$\begin{aligned} u_1' = u_1'' = \cdots = u_1^{(2\mu)} &= \frac{u_1}{2\mu}, \\ u_2' = u_2'' = \cdots = u_2^{(2\mu)} &= \frac{u_2}{2\mu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ u_\varrho' = u_\varrho'' = \cdots = u_\varrho^{(2\mu)} &= \frac{u_\varrho}{2\mu} \end{aligned}$$

setzen, und es werden, wenn man die Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$, in welche dadurch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (25.) des vorhergehenden § sich verwandeln, mit

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_1, \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_2, \quad \ldots \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer mit

$$\varphi(u_1, \ldots)_1, \quad \varphi(u_1, \ldots)_2, \quad \ldots \quad \varphi(u_1, \ldots)_{2\varrho+1}$$

bezeichnet, dieselben die Gestalt

$$(2.) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_a &= \frac{u_a + \mathfrak{U}_3^{(a)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m-1}^{(a)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ \varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\varrho+a} &= \frac{1 + \mathfrak{U}_2^{(\varrho+a)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(\varrho+a)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots}, \\ \varphi(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{2\varrho+1} &= \frac{1 + \mathfrak{U}_2^{(2\varrho+1)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(2\varrho+1)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2m}^{(0)} + \cdots} \end{aligned} \right.$$

haben, in welchen Formeln $\mathfrak{U}_m^{(x)}$ eine ganze homogene Function m^{ten} Grades von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bedeutet, und die unendlichen Reihen, welche den Nenner und die Zähler bilden, für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, die ihrem absoluten Betrage nach die Grenzen $T_1, T_2, \dots T_\varrho$ nicht überschreiten, unbedingt convergent sind. Für hinlänglich kleine Werthe der genannten Veränderlichen lassen sich $\varphi(u_1, \dots)_1, \varphi(u_1, \dots)_2$, u. s. w. nach ganzen positiven Potenzen derselben in convergirende Reihen entwickeln, welche mit den entsprechenden unter (1.) aufgestellten übereinstimmen.

Durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) = 0,$$

wo

$$\varphi(x) = P(x) - \Sigma\left\{\frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} \cdot \frac{P(x)}{x - a_\alpha} \varphi^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\right\} \tag{3.}$$

ist, und man

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)}} = \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha, \\ &\sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\alpha})}{P(a_{\varrho+\alpha})}} = \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\varrho+\alpha}, \\ &\sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}} = \varphi(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1} \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

hat, ergeben sich sodann ϱ Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, welche den Differential-Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} du_1 &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a_1} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}, \\ du_2 &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a_2} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ du_\varrho &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a_\varrho} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}} \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

genügen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ annehmen, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Werthe, welche die Wurzelgrössen in diesen Gleichungen haben müssen, erhält man ohne Zweideutigkeit, indem man mit

$$M(x, u_1, u_2, \dots u_\varrho), \qquad N(x, u_1, u_2, \dots u_\varrho)$$

die Functionen bezeichnet, in welche die Ausdrücke (26, § 3) durch die angegebene Substitution übergehen, durch die Formel

$$(6.) \qquad \frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{Q(x_\alpha)} = \frac{N(x_\alpha, u_1, u_2, \dots u_\varrho)}{M(x_\alpha, u_1, u_2, \dots u_\varrho)} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \varrho).$$

Hierzu ist jetzt noch eine wesentliche Bemerkung zu machen. Der Nenner und die Zähler in den Ausdrücken von

$$\varphi(u_1, \dots)_1, \quad \varphi(u_1, \dots)_2 \quad \text{u. s. w.}$$

hängen, ausser von $u_1, u_2, \dots$, noch von der Zahl μ ab. Gleichwohl lässt sich nachweisen, dass die Werthe dieser Functionen selbst stets dieselben bleiben, welchen Werth man auch dieser Zahl geben möge, wenn derselbe nur gross genug genommen wird, um die in den in Rede stehenden Ausdrücken vorkommenden Reihen convergent zu machen.

Wenn nämlich $F(u_1, u_2, \dots)$, $G(u_1, u_2, \dots)$, $F'(u_1, u_2, \dots)$, $G'(u_1, u_2, \dots)$ eindeutige Functionen mehrerer Veränderlichen $u_1, u_2, \dots$ sind, die sich nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln lassen, und es gilt die Gleichung

$$\frac{F(u_1, u_2, \dots)}{G(u_1, u_2, \dots)} = \frac{F'(u_1, u_2, \dots)}{G'(u_1, u_2, \dots)}$$

für alle Werthe von $u_1, u_2, \dots$, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als gewisse Grössen sind; so muss sie überhaupt für alle Werthe der genannten Veränderlichen bestehen, bei denen die Reihen für F, G, F', G' sämmtlich convergiren. Denn es folgt aus ihr

$$FG' = GF',$$

und wenn diese Gleichung für beliebige unendlich kleine Werthe von $u_1, u_2, \dots$ richtig sein soll, so müssen die Reihen, in welche FG' und GF' nach ganzen positiven Potenzen dieser Grössen entwickelbar sind, in den gleichstelligen Coefficienten übereinstimmen, woraus denn folgt, dass sie, und mit ihr auch die ursprüngliche

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'}$$

gilt, sobald nur $u_1, u_2, \dots$ solche Werthe haben, dass die Entwicklungen von F, G, F', G' sämmtlich convergent sind.

Bezeichnet man nun die Reihen, welche in dem Ausdrucke irgend einer der Functionen $\varphi(u_1, \ldots)_1$, $\varphi(u_1, \ldots)_2$ u. s. w., bei einem bestimmten Werthe von μ, den Zähler und den Nenner bilden, mit F, G, sowie mit F', G' dieselben Reihen für irgend einen andern Werth von μ, so stimmen, nach dem oben Bemerkten, die Reihen, in welche die Brüche

$$\frac{F}{G}, \quad \frac{F'}{G'}$$

bei hinlänglich kleinen Werthen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ entwickelt werden können, vollständig überein, und es besteht daher die Gleichung

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'}$$

jedenfalls für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$, deren absolute Beträge kleiner als gewisse Grössen sind, und somit, nach dem soeben Bewiesenen, überhaupt für diejenigen Werthe dieser Veränderlichen, bei denen die Reihen F, G, F', G' alle vier convergiren — wodurch die Richtigkeit des Behaupteten dargethan ist.

In ähnlicher Weise lässt sich ferner zeigen, dass man nach Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ auch für die Wurzelgrössen $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$ vermittelst der Formel (6.) stets dieselben Werthe erhalte, welche Zahl μ man auch bei Bildung der Functionen M, N anwenden möge. Es ist aber bemerkenswerth, dass man aus der Function $\varphi(x)$ eine andere vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade und mit Coefficienten von demselben analytischen Charakter wie die von $\varphi(x)$ selbst ableiten kann, welche jene Wurzelgrössen liefert, wenn man $x = x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ setzt.

Es werde $\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x)$ gesetzt, und nachdem man die Gleichung

$$du_\mathfrak{b} = \sum_\mathfrak{c} \frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{c})}{x_\mathfrak{c} - a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{c}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{c})}}$$

mit

$$\frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b})\, P'(a_\mathfrak{b})}$$

multiplicirt, auf beiden Seiten in Beziehung auf $\mathfrak{b}$ summirt. Dies giebt

$$\sum_\mathfrak{b} \frac{\varphi(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{du_\mathfrak{b}}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \frac{1}{2} \frac{\varphi(a_\mathfrak{b})\, P(x_\mathfrak{c})}{(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b})(x_\mathfrak{c} - a_\mathfrak{b})\, P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{dx_\mathfrak{c}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{c})}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(x)}{(x_a-x)P(x)} = \sum_b \frac{\varphi(a_b)}{(x_a-a_b)(x-a_b)P'(a_b)},$$

und daher, wenn man $x = x_c$ setzt,

$$\sum_b \frac{\varphi(a_b)}{(x_c-a_b)(x_a-a_b)P'(a_b)} = 0, \quad \text{wofern } c \gtrless a,$$

$$\sum_b \frac{\varphi(a_b)}{(x_a-a_b)(x_a-a_b)P'(a_b)} = -\frac{\varphi'(x_a)}{P(x_a)}.$$

Hiernach reducirt sich die rechte Seite der vorhergehenden Differential-Gleichung auf

$$-\frac{1}{2}\frac{\varphi'(x_a)\,dx_a}{\sqrt{R(x_a)}},$$

und man erhält

$$\varphi'(x_a)\,dx_a = -2\sum_b \frac{\varphi(a_b)\sqrt{R(x_a)}}{(x_a-a_b)P'(a_b)}\,du_b.$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(x_a)\frac{\partial x_a}{\partial u_b} = -\frac{2\varphi(a_b)\sqrt{R(x_a)}}{(x_a-a_b)P'(a_a)},$$

$$-\sum_b \varphi'(x_a)\frac{\partial x_a}{\partial u_b} = 2\sqrt{R(x_a)}\cdot\sum_b \frac{\varphi(a_b)}{(x_a-a_b)P'(a_b)}.$$

Aber

$$\frac{\varphi(x)}{P(x)} = 1+\sum_b \frac{\varphi(a_b)}{(x-a_b)P'(a_b)},$$

und daher für $x = x_a$

$$\sum_b \frac{\varphi(a_b)}{(x_a-a_b)P'(a_b)} = -1.$$

Folglich

$$\sum_b \varphi'(x_a)\frac{\partial x_a}{\partial u_b} = 2\sqrt{R(x_a)}.$$

Nun ist, nach dem Vorhergehenden, $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x und $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$, und man hat, weil $\varphi(x_a) = 0$ ist,

$$\varphi'(x_a)\frac{\partial x_a}{\partial u_b} = -\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_b}\right)_{x=x_a}.$$

Somit giebt die vorhergehende Gleichung, wenn man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_1}+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\varrho}\right) = \psi(x) \tag{7.}$$

setzt, wo dann $\psi(x)$ eine ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, deren Coefficienten gleich denen von $\varphi(x)$ eindeutige Functionen der Grössen $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ sind,

$$\sqrt{R(x_a)} = -\psi(x_a) \qquad (a = 1, 2, \ldots \varrho). \tag{8.}$$

Da nun die Werthe der Coefficienten von $\varphi(x)$, die aus den Functionen $\varphi(u_1, \ldots)_1, \ldots \varphi(u_1, \ldots)_\varrho$ zusammengesetzt werden, von μ unabhängig sind, so gilt dasselbe auch hinsichtlich der Coefficienten von $\psi(x)$. Und so ist erwiesen, dass die Werthe der Grössen

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_\varrho, \quad \sqrt{R(x_1)}, \quad \sqrt{R(x_2)}, \quad \ldots \quad \sqrt{R(x_\varrho)},$$

wenn man dieselben vermittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln berechnet, nur von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$, in keinerlei Weise aber von der dabei gebrauchten Zahl μ abhängen.

Die Functionen $\varphi(u_1, \ldots)_1, \varphi(u_1, \ldots)_2$, u. s. w., auf welche, der vorstehenden Darstellung nach, das Abel'sche Theorem fast mit Nothwendigkeit führt, können durch die Formeln (2.) für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ als vollständig definirt betrachtet werden, indem man, wie auch die letztern angenommen werden mögen, stets μ so gross wählen kann, dass die in den Ausdrücken jener Functionen vorkommenden unendlichen Reihen convergiren. Für $\varrho = 1$ gehen sie, wenn

$$\sqrt{(a_3 - a_1)A_0}\,.\,u_1 = u$$

gesetzt wird, in die elliptischen

$$\sin\mathrm{am}\,u, \qquad \cos\mathrm{am}\,u, \qquad \Delta\,\mathrm{am}\,u$$

über. Aus diesem Grunde mögen sie vorzugsweise »hyperelliptische oder Abel'sche Functionen der Argumente $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$« genannt werden. Ferner sollen, der letztern Benennung entsprechend, für dieselben von nun an die Bezeichnungen

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_1, \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_2, \quad \ldots \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1, \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_2, \quad \ldots \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{2\varrho+1}$$

gebraucht werden.*)

*) Die Form, welche ich in der vorliegenden Abhandlung den Abel'schen Functionen gegeben habe, stimmt nicht ganz mit derjenigen überein, in welcher sie in der frühern, im 47sten Bande des Crelle'schen

Durch die bisherigen Entwicklungen ist jetzt das in der Einleitung ausgesprochene, die Form des Abhängigkeitsverhältnisses, welches zwischen den Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ und $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ durch die daselbst aufgestellten Differential-Gleichungen begründet ist, betreffende Theorem strenge erwiesen. Dasselbe möge, in noch bestimmterer Weise gefasst, hier wiederholt und mit einer übersichtlichen Zusammenstellung der wichtigsten Formeln verbunden werden.

Es sei

$$\text{(I.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} R(x) &= A_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2\varrho+1}), \\ P(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho), \qquad \frac{\partial P(x)}{\partial x} = P'(x), \\ Q(x) &= A_0(x-a_{\varrho+1})(x-a_{\varrho+2})\dots(x-a_{2\varrho+1}), \end{aligned} \right.$$

so lassen sich die Grössen $x_1, x_2, \dots x_\varrho$, welche die Differential-Gleichungen

$$\text{(II.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} du_1 &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a_1} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}, \\ du_2 &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a_2} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ du_\varrho &= \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a_\varrho} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}} \end{aligned} \right.$$

befriedigen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ annehmen, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden, als die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades betrachten, welcher man die Form

$$\text{(III.)} \qquad \Sigma \left\{ \frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{x - a_\alpha} \right\} = 1$$

geben kann. In dieser bedeuten

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_1, \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2, \quad \dots \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\varrho$$

Journals [S. 133 dieses Bandes] abgedruckten, aufgestellt sind. Die letztere dürfte, an sich betrachtet, einige Vorzüge haben; ich habe sie aber geändert, um den nicht unwesentlichen Vortheil zu erreichen, dass jede Abel'sche Function für $\varrho = 1$ geradezu in eine der elliptischen von der gebräuchlichen Form übergehe — was bei den dortigen $\mathrm{al}(u_1, \dots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \dots)_1$, u. s. w. nicht der Fall ist, indem diese vielmehr für $\varrho = 1$ mit den von Abel in dessen erster Abhandlung über die elliptischen Transcendenten gebrauchten Formen überein kommen — und auf diese Weise die Vergleichung jedes gefundenen Resultats mit einem aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten erleichtert werde.

eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, welche für alle innerhalb irgend eines endlichen Bereichs liegenden Werthe dieser Grössen in der Form

$$\text{(IV.)}\quad \begin{cases} \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_1 = \dfrac{u_1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3^{(1)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(1)} + \dots}{1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \dots}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\varrho = \dfrac{u_\varrho + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_3^{(\varrho)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(\varrho)} + \dots}{1 + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)} + \dots + (u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \dots}, \end{cases}$$

wo durch $(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\mathfrak{m}}^{(\varkappa)}$ eine homogene ganze Function $\mathfrak{m}^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet wird, dargestellt werden können.

Setzt man ferner

$$\text{(V.)}\qquad (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\varrho) = \varphi(x),$$

wo denn

$$\text{(VI.)}\qquad \varphi(x) = P(x) - \sum\left\{\frac{Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} \cdot \frac{P(x)}{x-a_\alpha}\,\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\right\}$$

und

$$\text{(VII.)}\quad \sqrt{\frac{\varphi(a_\alpha)}{-Q(a_\alpha)}} = \sqrt{\frac{(a_\alpha-x_1)(a_\alpha-x_2)\dots(a_\alpha-x_\varrho)}{-A_0(a_\alpha-a_{\varrho+1})\dots(a_\alpha-a_{2\varrho+1})}} = \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha$$

ist, und

$$\text{(VIII.)}\qquad \sum \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial u_\alpha} = \psi(x),$$

oder, indem man

$$\text{(IX.)}\quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\partial u_\varrho} \quad \text{mit} \quad \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha$$

bezeichnet,

$$\text{(X.)}\qquad \psi(x) = \sum\left\{\frac{-Q(a_\alpha)}{P'(a_\alpha)} \cdot \frac{P(x)}{x-a_\alpha}\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\,\overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\right\},$$

so giebt die Formel

$$\text{(XI.)}\qquad \sqrt{R(x_\alpha)} = -\psi(x_\alpha)$$

nach Bestimmung von $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ diejenigen Werthe der Wurzelgrössen $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$, welche diesen in den obigen Differential-Gleichungen (II.) beigelegt werden müssen. Weiter hat

man

$$
\text{(XII.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} &= \sqrt{\frac{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_2)\dots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_\varrho)}{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_2)\dots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_\varrho)}}\\
&= \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\varrho+\mathfrak{a}},\\
\sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}} &= \sqrt{\frac{(a_{2\varrho+1}-x_1)(a_{2\varrho+1}-x_2)\dots(a_{2\varrho+1}-x_\varrho)}{(a_{2\varrho+1}-a_1)(a_{2\varrho+1}-a_2)\dots(a_{2\varrho+1}-a_\varrho)}}\\
&= \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1},
\end{aligned}\right.
$$

wo $\mathrm{al}(u_1,\dots)_{\varrho+1}, \dots \mathrm{al}(u_1,\dots)_{2\varrho+1}$ Functionen derselben Art wie $\mathrm{al}(u_1,\dots)_1$ u. s. w. sind, die sich in der Form

$$
\text{(XIII.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{\varrho+1} &= \frac{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(\varrho+1)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+1)}+\dots}{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)}+\dots},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\varrho+1} &= \frac{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(2\varrho+1)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(2\varrho+1)}+\dots}{1+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_2^{(0)}+\dots+(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)}+\dots}
\end{aligned}\right.
$$

darstellen lassen, wo der Nenner derselbe ist wie in den Ausdrücken (IV.).

Diesen Formeln füge ich noch die folgenden hinzu.

Bezeichnet man mit α irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\varrho-1$, und setzt

$$
\text{(XIV.)}\qquad -Q(a_\mathfrak{a}) = l_\mathfrak{a},\qquad P(a_{\varrho+\mathfrak{a}}) = l_{\varrho+\mathfrak{a}},\qquad P(a_{2\varrho+1}) = l_{2\varrho+1},
$$

$$
\text{(XV.)}\quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\partial u_1}+\dots+\frac{\partial\,\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha}{\partial u_\varrho} = \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha,
$$

so ist

$$
\text{(XVI.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(a_\alpha) &= l_\alpha \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha,\\
\psi(a_\alpha) &= l_\alpha \mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha,
\end{aligned}\right.
$$

so dass man auch, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho$ ϱ verschiedene Werthe von α sind, und

$$
\text{(XVII.)}\qquad (x-a_{\alpha_1})\dots(x-a_{\alpha_\varrho}) = R_1(x)
$$

gesetzt wird,

$$
\text{(XVIII.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(x) &= R_1(x)+\sum_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho}\left\{\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)}\cdot\frac{R_1(x)}{x-a_\alpha}\mathrm{al}^2(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\right\},\\
\psi(x) &= \sum_{\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\varrho}\left\{\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)}\cdot\frac{R_1(x)}{x-a_\alpha}\mathrm{al}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha \overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_\alpha\right\}
\end{aligned}\right.
$$

hat.

Ferner ist, indem

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{\psi(x_a)}{(x-x_a)\varphi'(x_a)}, \quad \text{wo} \quad \varphi'(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x},$$

in Folge von (X.), (XVI.)

(XIX.) $$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \Sigma \frac{\sqrt{R(x_a)}}{(x_a-x)\varphi'(x_a)},$$

(XX.) $$\frac{\overline{\mathrm{al}}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_\alpha}{\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_\alpha} = \Sigma \frac{\sqrt{R(x_a)}}{(x_a-a_\alpha)\varphi'(x_a)}.$$

Nun ist oben bei Herleitung der Gleichung (8.) gefunden worden

$$\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_b}\right)_{x=x_a} = -\varphi'(x_a)\frac{\partial x_a}{\partial u_b} = \frac{2\varphi(a_b)\sqrt{R(x_a)}}{(x_a-a_b)P'(a_b)} = -\frac{2\varphi(a_b)\psi(x_a)}{(x_a-a_b)P'(a_b)},$$

woraus man schliesst, dass für jeden Werth von x

(XXI.) $$\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_b} = \frac{\psi(a_b)\varphi(x)-\varphi(a_b)\psi(x)}{(x-a_b)P'(a_b)}$$

ist, indem die beiden einander gleichgesetzten Ausdrücke ganze Functionen $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades von x sind, welche für ϱ Werthe dieser Grösse, $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$, der vorstehenden Formel gemäss übereinstimmen, also identisch sein müssen. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die durch (XIX.) gegebenen Ausdrücke von $\psi(a_b)$ und $\psi(x)$ substituirt,

(XXII.) $$\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_b} = -\frac{\varphi(a_b)\varphi(x)}{P'(a_b)} \sum_a \left\{ \frac{\sqrt{R(x_a)}}{(x_a-x)(x_a-a_b)\varphi'(x_a)} \right\}.$$

Ferner, wenn man $x = a_\alpha$ setzt,

(XXIII.) $$\frac{\partial \,\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_\alpha}{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_b \partial u_b} = \frac{-Q(a_b)}{P'(a_b)} \cdot \frac{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_b - \mathrm{al}(u_1, \ldots)_b \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_\alpha}{a_\alpha - a_b},$$

vorausgesetzt, dass α von b verschieden sei; oder wenn man, unter der Annahme, dass $\beta \leqslant \alpha$,

(XXIV.) $$\frac{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_\beta - \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_\alpha}{a_\alpha - a_\beta} \quad \text{durch} \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\alpha\beta}$$

bezeichnet, wo denn zufolge (XX.)

(XXV.) $$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\alpha\beta} = -\Sigma \left\{ \frac{\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha \,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\beta \sqrt{R(x_a)}}{(x_a-a_\alpha)(x_a-a_\beta)\varphi'(x_a)} \right\}$$

ist, und man

$$\text{(XXVI.)} \qquad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\alpha\beta} = \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_{\beta\alpha}$$

hat:

$$\text{(XXVII.)} \qquad \frac{\partial \,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha}{\partial u_\mathfrak{b}} = -\frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\mathfrak{b}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta}, \qquad (\mathfrak{b} \leqq \alpha)$$

aus welcher Gleichung, wenn man $\alpha = \mathfrak{a}$ setzt und auf beiden Seiten mit $\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\,\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\mathfrak{a}$ multiplicirt, noch

$$\text{(XXVIII.)} \qquad \frac{\partial\left(\frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})}\,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{a}\right)}{\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{\partial\left(\frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{b}\right)}{\partial u_\mathfrak{a}}$$

folgt.

Die in dem Vorstehenden eingeführten Functionen

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha, \qquad \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_\alpha, \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta}$$

können (nach den Formeln (XVI.), (XX.), (XXIV.)) sämmtlich algebraisch durch $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ ausgedrückt werden; es müssen daher unter ihnen so viele algebraische Relationen bestehen, als Functionen vorhanden sind, weniger ϱ. Diese sollen in dem folgenden § entwickelt und zusammengestellt werden.

§ 5.

Algebraische Relationen unter den Abel'schen Functionen und deren ersten Differential-Coefficienten.

Es werde der Kürze wegen

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha = p_\alpha, \qquad \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_\alpha = \bar{p}_\alpha, \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}$$

gesetzt; dann gelten folgende Sätze.

I. Durch je ϱ von den Quadraten der Grössen p_α können die übrigen linear ausgedrückt werden.

Aus der Formel (XVIII.) des vorhergehenden § folgt nämlich, wenn man $x = a_\beta$ setzt, und β nicht unter den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho$ begriffen ist, mit Berücksichtigung von (XVI.):

$$\frac{l_\beta}{R_1(a_\beta)} \cdot p_\beta^2 = 1 - \sum_{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varrho} \left\{ \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} \cdot \frac{p_\alpha^2}{a_\alpha - a_\beta} \right\}.$$

II. Ebenso können durch je ϱ von den Grössen

$$p_{\gamma}^{2},\quad p_{1\gamma}^{2},\quad p_{2\gamma}^{2},\quad \cdots\quad p_{(2\varrho+1)\gamma}^{2}$$

(wo $p_{\gamma\gamma}$ fortzulassen ist) die übrigen linear ausgedrückt werden, vermittelst der Formeln

$$A_0 p_{\gamma}^{2} = \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma R_1(a_\gamma)} - \sum_{\alpha}\left\{\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^{2}\right\},$$

$$\frac{(a_\gamma - a_\beta) l_\beta}{R_1(a_\beta)} p_{\beta\gamma}^{2} = A_0 p_{\gamma}^{2} + \sum_{\alpha}\left\{\frac{a_\gamma - a_\alpha}{a_\beta - a_\alpha}\cdot\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^{2}\right\}$$

$$= \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma R_1(a_\gamma)} + \sum_{\alpha}\left\{\frac{a_\gamma - a_\beta}{a_\beta - a_\alpha}\cdot\frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^{2}\right\},$$

in denen sich das Summenzeichen auf dieselben Werthe von α bezieht wie in (I.), und γ sowohl als β nicht unter diesen begriffen sein darf.

In Folge der Gleichung

$$\psi(x_\mathfrak{a}) = -\sqrt{R(x_\mathfrak{a})} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots \varrho)$$

wird die Function $R(x) - \psi^2(x)$ für $x = x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ gleich Null, und ist daher durch $\varphi(x)$ theilbar. Setzt man nun

$$\psi_\gamma(x) = \frac{\overline{p}_\gamma \varphi(x) - p_\gamma \psi(x)}{x - a_\gamma},$$

so wird der Zähler dieses Ausdruckes für $x = a_\gamma$ (zufolge der Formel (XVI.) des vorhergehenden §) gleich Null, und es ist somit $\psi_\gamma(x)$ eine ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades. Dann hat man

$$p_\gamma^2 R(x) - (x - a_\gamma)^2 \psi_\gamma^2(x) = p_\gamma^2 (R(x) - \psi^2(x)) + \overline{p}_\gamma \varphi(x)(2 p_\gamma \psi(x) - \overline{p}_\gamma \varphi(x)),$$

und es ist also der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ebenfalls durch $\varphi(x)$ theilbar, wie auch durch $x - a_\gamma$, so dass man setzen kann

$$p_\gamma^2 \frac{R(x)}{x - a_\gamma} - (x - a_\gamma)\psi_\gamma^2(x) = \varphi(x)\varphi_\gamma(x),$$

und dann $\varphi_\gamma(x)$ eine ganze Function ϱ^{ten} Grades bedeutet. Nimmt man nun $x = a_\alpha$, $\alpha \gtrless \gamma$ vorausgesetzt, so ergiebt sich (zufolge Formel (XVI.) d. v. §)

$$\varphi_\gamma(a_\alpha) = (a_\gamma - a_\alpha) l_\alpha p_{\alpha\gamma}^2,$$

indem

$$\psi_\gamma(a_\alpha) = l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}$$

ist. Ferner erhält man für $x = a_\gamma$

$$\varphi_\gamma(a_\gamma) = \frac{R'(a_\gamma)}{l_\gamma}.$$

Bemerkt man nun noch, dass der Coefficient des höchsten Gliedes von $\varphi_\gamma(x)$ gleich $A_0 p_\gamma^2$ ist, und man daher

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_\gamma(x)}{R_1(x)} &= A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{\varphi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha) R_1'(a_\alpha)} \\ &= A_0 p_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{a_\gamma - a_\alpha}{x-a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{R_1'(a_\alpha)} p_{\alpha\gamma}^2\end{aligned}$$

hat, so ergeben sich die zu beweisenden Relationen, indem man $x = a_\gamma$ und $x = a_\beta$ setzt.

III. Ähnliche Relationen finden statt unter den in der Reihe

$$p_1 p_{1\gamma}, \quad p_2 p_{2\gamma}, \quad \cdots \quad p_{2\varrho+1} p_{(2\varrho+1)\gamma}$$

enthaltenen Producten.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{\psi_\gamma(x)}{R_1(x)} = \sum_\alpha \frac{\psi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha) R_1'(a_\alpha)} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}}{(x-a_\alpha) R_1'(a_\alpha)}$$

$x = a_\beta$, so ergiebt sich

$$\frac{l_\beta}{R_1(a_\beta)} p_\beta p_{\beta\gamma} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha p_\alpha p_{\alpha\gamma}}{(a_\beta - a_\alpha) R_1'(a_\alpha)},$$

wo hinsichtlich der Zahlen α, β, γ dasselbe gilt wie bei der vorhergehenden Nr.

IV. Unter je sechs Functionen $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_{\beta\gamma}, p_{\gamma\alpha}, p_{\alpha\beta}$, wo α, β, γ verschiedene Werthe haben müssen, findet die Relation

$$(a_\beta - a_\gamma) p_\alpha p_{\beta\gamma} + (a_\gamma - a_\alpha) p_\beta p_{\gamma\alpha} + (a_\alpha - a_\beta) p_\gamma p_{\alpha\beta} = 0$$

oder

$$p_{\alpha\beta} = \frac{(a_\gamma - a_\beta) p_\alpha p_{\beta\gamma} - (a_\gamma - a_\alpha) p_\beta p_{\alpha\gamma}}{(a_\alpha - a_\beta) p_\gamma}$$

statt.

Denn es ist (vermöge Formel (XXIV.) des v. §)

$$\frac{(a_\alpha - a_\beta)\,p_{\alpha\beta}}{p_\alpha p_\beta} = \frac{\bar{p}_\beta}{p_\beta} - \frac{\bar{p}_\alpha}{p_\alpha},$$
$$\frac{(a_\beta - a_\gamma)\,p_{\beta\gamma}}{p_\beta p_\gamma} = \frac{\bar{p}_\gamma}{p_\gamma} - \frac{\bar{p}_\beta}{p_\beta},$$
$$\frac{(a_\gamma - a_\alpha)\,p_{\gamma\alpha}}{p_\gamma p_\alpha} = \frac{\bar{p}_\alpha}{p_\alpha} - \frac{\bar{p}_\gamma}{p_\gamma},$$

aus welchen Gleichungen, wenn man sie durch Addition verbindet, die aufgestellte Relation sofort folgt.

V. Endlich ergeben sich noch folgende Gleichungen, in denen $\mathfrak{a}'$ irgend eine der Zahlen $\varrho+1, \varrho+2, \ldots 2\varrho+1$ bedeuten soll:

$$\bar{p}_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{b}} = (a_{\mathfrak{a}'} - a_\mathfrak{a})\,p_{\mathfrak{a}'}\,p_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} + \sum_\mathfrak{b}{}' \left\{ \frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{a_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{b} - a_{\mathfrak{a}'}}\, p_\mathfrak{b}\, p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\}, \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

$$\frac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{a}} = (a_{\mathfrak{a}'} - a_\mathfrak{a})\,p_{\mathfrak{a}'}\,p_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} + \sum_\mathfrak{b}{}' \left\{ \frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{a_\mathfrak{a} - a_{\mathfrak{a}'}}{a_\mathfrak{b} - a_{\mathfrak{a}'}}\, p_\mathfrak{b}\, p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\}, \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

$$\bar{p}_{\mathfrak{a}'} = \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial p_{\mathfrak{a}'}}{\partial u_\mathfrak{b}} = \sum_\mathfrak{b} \left\{ \frac{-Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\, p_\mathfrak{b}\, p_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}} \right\}.$$

Man hat nämlich (Formel (XXVII.) d. v. §)

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial u_\mathfrak{b}} = -\frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\, p_\mathfrak{b}\, p_{\alpha\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a}).$$

Hieraus folgt, wenn man $\alpha = \mathfrak{a}'$ setzt, sofort die dritte der vorstehenden Gleichungen. Aus (VI.) aber folgt, wenn man $x = a_{\mathfrak{a}'}$ nimmt und $\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{a}$ schreibt,

$$p_{\mathfrak{a}'}^2 = 1 - \sum_\mathfrak{b} \left\{ \frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{p_\mathfrak{b}^2}{a_{\mathfrak{a}'} - a_\mathfrak{b}} \right\},$$

und hieraus, wenn man nach $u_\mathfrak{a}$ differentiirt,

$$p_{\mathfrak{a}'}\,p_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \frac{\dfrac{\partial p_\mathfrak{a}}{\partial u_\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_\mathfrak{a}} - \sum_\mathfrak{b}{}' \left\{ \frac{Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{p_\mathfrak{b}\, p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_\mathfrak{b}} \right\}, \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

woraus sich die zweite Gleichung ergiebt, aus der dann weiter die erste folgt.

VI. Von den vorstehenden Relationen mögen nun die folgenden besonders hervorgehoben werden, in denen der Kürze wegen

$$2\varrho+1 \text{ durch } \mathfrak{a}_0, \qquad \varrho+\mathfrak{a} \text{ durch } \mathfrak{a}', \qquad \varrho+\mathfrak{b} \text{ durch } \mathfrak{b}'$$

bezeichnet ist.

$$(1.)\qquad \mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0} = 1-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}}}\right\},$$

$$(2.)\qquad \mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'} = 1-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{a}}}\right\},$$

$$(3.)\qquad A_0\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0} = \frac{Q'(a_{\mathfrak{a}_0})}{P(a_{\mathfrak{a}_0})}+\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\right\},$$

$$(4.)\qquad (a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'} = A_0\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0}-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{a}}}\cdot\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\right\}$$
$$= \frac{Q'(a_{\mathfrak{a}_0})}{P(a_{\mathfrak{a}_0})}-\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{a}}}\cdot\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}^2(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\right\},$$

$$(5.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'} = \sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})}\cdot\frac{\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{a}'}}\right\},$$

$$(6.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$
$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}})\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}}-(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}})\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}}},$$

$$(7.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}$$
$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}})\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}}-(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{b}}},$$

$$(8.)\qquad \mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'}$$
$$= \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}'})\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}'}-(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{b}'}},$$

$$(9.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, & (\mathfrak{b}\gtrless\mathfrak{a}) \\ \dfrac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}}, \\ \dfrac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}, \\ \dfrac{\partial\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}} = (a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}})\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}} \\ \qquad\qquad -\sum_{\mathfrak{b}}{}'\left\{\dfrac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\dfrac{a_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{a}_0}}{a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(u_1,\ldots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right\}. \\ \qquad\qquad (\mathfrak{b}\gtrless\mathfrak{a}) \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen gehen Nr. (1.), (2.), (3.), (4.), (5.) aus (I.), (II.), (III.) hervor, wenn man in diesen $R_1(x) = P(x)$ setzt; Nr. (6.), (7.), (8.) sind die Relationen (IV.), wenn man $\gamma = \mathfrak{a}_0$ nimmt, und die unter Nr. (9.) finden sich unter (XXVII.) des v. § und (V.). Sie stellen, wie man sofort übersieht, so viel Relationen unter den Functionen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta}$ und den ersten Differential-Coefficienten von $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ dar, als nöthig sind, um alle diese Grössen algebraisch durch

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1, \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_2, \quad \ldots \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_\varrho$$

(an deren Stelle je ϱ andere der Functionen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha$ treten könnten) auszudrücken, ohne dass in den betreffenden Formeln die Argumente $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ selbst vorkommen; woraus unmittelbar weiter folgt, dass auch die höheren Differential-Coefficienten der Abel'schen Functionen algebraisch durch je ϱ der letztern ausdrückbar sein werden.

§ 6.

Die Abel'schen Integral-Functionen.

Das Integral

$$\int \left\{ \frac{F(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{F(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \cdots + \frac{F(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}} \right\},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeuten soll, geht, wenn man $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$, $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}$, $\ldots$ $\sqrt{R(x_\varrho)}$ vermittelst der Formeln des § 4 durch $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ ausdrückt, in eine Function dieser Argumente über, welche man eine »Abel'sche Integral-Function« derselben nennen kann, und deren analytischer Charakter jetzt näher untersucht werden soll.

Man kann, wie weiter unten wird nachgewiesen werden, jede in der vorstehenden Formel enthaltene Function auf eine einzige zurückführen, die mit

$$\mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho) \quad \text{oder kürzer} \quad \mathfrak{A}(u_1, \ldots)$$

bezeichnet werden soll, und durch die folgende Gleichung

$$(1.) \qquad d\mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho) = \sum \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}$$

definirt wird, mit der näheren Bestimmung, dass $\mathfrak{A}(u_1, \ldots)$ den Werth Null

erhalte, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Constante a kann jeden beliebigen Werth haben, mit Ausnahme von $a_1, a_2, \dots a_{2\varrho+1}$, und auch das Zeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{R(a)}$ willkürlich bestimmt werden. Ist es nöthig, a in die Bezeichnung der erklärten Function mit aufzunehmen, so soll dieselbe $\mathfrak{A}(u_1, u_2, \dots u_\varrho; a)$ geschrieben werden.

Nimmt man zunächst die Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ so klein an, dass nicht nur $x_1, x_2, \dots x_\varrho$ in der Nähe von $a_1, a_2, \dots a_\varrho$ sich befinden, und dieselben daher, so wie $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \dots \sqrt{R(x_\varrho)}$, durch die unendlichen Reihen (4.), (5.) des § 1 ausgedrückt werden können, sondern auch die Differenzen x_1-a_1, $x_2-a_2, \dots x_\varrho-a_\varrho$ dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $a-a_1$, $a-a_2, \dots a-a_\varrho$ sind; so erhält man, indem

$$\frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha-a} = \frac{x_\alpha-a_\alpha}{x_\alpha-a}\cdot\frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha-a_\alpha}$$

und

$$\frac{x_\alpha-a_\alpha}{x_\alpha-a} = \frac{x_\alpha-a_\alpha}{a_\alpha-a}\left\{1+\left(\frac{x_\alpha-a_\alpha}{a-a_\alpha}\right)+\left(\frac{x_\alpha-a_\alpha}{a-a_\alpha}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$= \frac{Q(a_\alpha)\cdot s_\alpha^2}{(a_\alpha-a)P'(a_\alpha)}\left\{1+\mathrm{S}\left(\frac{Q(a_\alpha)}{(a-a_\alpha)P'(a_\alpha)}\right)^{\mathfrak{m}}\cdot s_\alpha^{2\mathfrak{m}}\right\},$$

$$\mathfrak{m}=1,\dots\infty$$

$$\frac{1}{2}\frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha-a_\alpha}\cdot\frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}} = (1+(\mathfrak{a},\mathfrak{a})_1 s_\alpha^2+(\mathfrak{a},\mathfrak{a})_2 s_\alpha^4+\cdots)\,ds_\alpha$$

(§ 1.) ist:

$$(2.)\qquad \mathfrak{A}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\{\mathrm{S}_3+\mathrm{S}_5+\cdots+\mathrm{S}_{2\mathfrak{m}+1}+\cdots\}$$

$$= \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\{\mathfrak{U}_3+\mathfrak{U}_5+\cdots+\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}+\cdots\},$$

wo durch $\mathrm{S}_{2\mathfrak{m}+1}$ eine homogene ganze Function $(2\mathfrak{m}+1)^{\text{ten}}$ Grades von s_1, $s_2, \dots s_\varrho$ und durch $\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ eine eben solche von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ bezeichnet wird. Die Coefficienten von $\mathrm{S}_{2\mathfrak{m}+1}$, $\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ werden rational aus $a, a_1, a_2, \dots a_\varrho$ und den Coefficienten von $Q(x)$ zusammengesetzt; nach fallenden Potenzen von a entwickelt, fangen $\mathrm{S}_{2\mathfrak{m}+1}$, $\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ mit Gliedern an, die mit $a^{-\mathfrak{m}}$ multiplicirt sind.

Nun aber findet, wenn man jetzt wieder unter

$$\begin{array}{llll} u'_a, & u''_a, & \dots & u_a^{(2\mu)} \\ x'_a, & x''_a, & \dots & x_a^{(2\mu)} \\ \sqrt{R(x'_a)}, & \sqrt{R(x''_a)}, & \dots & \sqrt{R(x_a^{(2\mu)})} \\ M(x), & N(x), & \varphi(x) & \\ x_a, & \sqrt{R(x_a)} & & \end{array}$$

dieselben Grössen versteht wie in § 2, nach dem Abel'schen Theoreme nicht bloss die dort unter (6.) aufgestellte Gleichung statt, sondern auch die folgende

$$(3.) \quad \sum_a \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x'_a)}{x'_a-a}\cdot\frac{dx'_a}{\sqrt{R(x'_a)}}+\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x''_a)}{x''_a-a}\cdot\frac{dx''_a}{\sqrt{R(x''_a)}}+\cdots\right\}$$
$$= \sum_a\left\{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x_a)}{x_a-a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}\right\}+\frac{1}{2}d\log\left(\frac{M(a)P(a)+N(a)\sqrt{R(a)}}{M(a)P(a)-N(a)\sqrt{R(a)}}\right).$$

Werden daher

$$u_1^{(\mathfrak{p})},\quad u_2^{(\mathfrak{p})},\quad \dots\quad u_\varrho^{(\mathfrak{p})},$$

wo $\mathfrak{p}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \dots 2\mu$ bezeichnet, so klein angenommen, dass die Reihen auf der rechten Seite der Gleichung (2.), wenn man darin diese Grössen an die Stelle von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ setzt, convergiren, so hat man

$$(4.) \quad \Sigma\left\{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}\cdot\frac{P(x_a)}{x_a-a}\cdot\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}}\right\}$$
$$= d\mathfrak{A}(u'_1,\dots)+d\mathfrak{A}(u''_1,\dots)+\cdots+\frac{1}{2}d\log\left(\frac{M(a)P(a)-N(a)\sqrt{R(a)}}{M(a)P(a)+N(a)\sqrt{R(a)}}\right).$$

Jetzt setze man, wie in § 4,

$$u'_a = u''_a = \cdots = u_a^{(2\mu)} = \frac{u_a}{2\mu},$$

und nehme μ so gross an, dass nicht nur die unendlichen Reihen, welche in den dortigen Ausdrücken von $\mathrm{al}(u_1,\dots)_1$, $\mathrm{al}(u_1,\dots)_2$ u. s. w. und von $M(x,u_1,\dots)$, $N(x,u_1,\dots)$ vorkommen, convergent werden, sondern auch die für $\mathfrak{A}\left(\frac{u_1}{2\mu},\dots\right)$; so verwandeln sich die Grössen

$$x_1,\quad x_2,\quad \dots\quad x_\varrho,\quad \sqrt{R(x_1)},\quad \sqrt{R(x_2)},\quad \dots\quad \sqrt{R(x_\varrho)}$$

der Gleichung (4.) in die durch die Gleichungen (III.), (XI.) des genannten §

bestimmten; und es ergiebt sich durch Integration

$$(5.)\quad \mathfrak{A}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = 2\mu\,\mathfrak{A}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \frac{u_2}{2\mu}, \dots \frac{u_\varrho}{2\mu}\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{M(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\,P(a) - N(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\,P(a) + N(a, u_1, u_2, \dots u_\varrho)\sqrt{R(a)}}\right).$$

Eine Constante ist nach der Integration nicht hinzuzufügen, indem die Function, deren Logarithmus in dieser Gleichung vorkommt, sich auf die Einheit reducirt, wenn $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ sämmtlich verschwinden, wie aus den unter (26, § 2.) gegebenen Ausdrücken von $M(x)$, $N(x)$ zu ersehen ist.

Setzt man

$$(6.)\quad \frac{M(a, u_1, \dots)\,P(a) - N(a, u_1, \dots)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, \dots)\,P(a) + N(a, u_1, \dots)\sqrt{R(a)}} \cdot e^{4\mu\,\mathfrak{A}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \dots\right)} = \overline{\mathfrak{A}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho),$$

so ist

$$(7.)\quad \mathfrak{A}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = \tfrac{1}{2}\log\overline{\mathfrak{A}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho),$$

und es bezeichnet alsdann $\overline{\mathfrak{A}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ eine eindeutige Function von u_1, $u_2, \dots u_\varrho$, welche, wenn für die absoluten Werthe dieser Veränderlichen irgend welche Grenzen festgesetzt werden, die sie nicht übersteigen sollen, in der Form eines Bruches ausdrückbar ist, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \dots u_\varrho$ in convergirende Reihen sich entwickeln lassen. Für hinlänglich kleine Werthe der Argumente hat man

$$(8.)\quad \mathfrak{A}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = e^{2(\mathfrak{u}_3 + \mathfrak{u}_5 + \dots + \mathfrak{u}_{2m+1} + \dots)\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}},$$

woraus sich leicht erweisen lässt, ganz in derselben Weise, wie dies in § 4 für die Functionen $\varphi(u_1, \dots)_\alpha$ geschehen ist, dass der Werth von $\overline{\mathfrak{A}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$, obwohl in dem Ausdrucke dieser Function, wie er durch die Formel (6.) gegeben ist, die Zahl μ vorkommt, dennoch von derselben ganz unabhängig ist. Man hat daher folgenden Satz:

Es giebt eine eindeutige Function $\overline{\mathfrak{A}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho)$ der unbeschränkt veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \dots u_\varrho$, welche der Differential-Gleichung

$$\frac{1}{2}d\log\overline{\mathfrak{A}}(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = \Sigma\left\{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \cdot \frac{P(x_\alpha)}{x_\alpha - a} \cdot \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}}\right\},$$

in der $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$, $\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots \sqrt{R(x_\varrho)}$ die durch die Gleichungen (III.), (XI.) des § 4 bestimmten Functionen von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ sind, genügt und, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, den Werth 1 annimmt.

Wenn nun $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, so kann man dieselbe stets als ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad \text{und} \quad Bx^{m-1}$$

darstellen, wo m eine ganze positive Zahl, und A, B, a Constanten bedeuten. Mit Unterscheidung derjenigen Werthe von a, welche $R(a) = 0$ machen, von denen, bei welchen dies nicht der Fall ist, kann man daher als den allgemeinsten Ausdruck von $F(x)$ den folgenden annehmen

$$\begin{aligned}(9.)\qquad F(x) = {} & \sum_{\mathfrak{m}=1,\ldots m_1}\left\{\frac{\overset{1}{A}_{\mathfrak{m}}}{(x-\overset{1}{a})^{\mathfrak{m}}}\right\} + \sum_{\mathfrak{m}=1,\ldots m_2}\left\{\frac{\overset{2}{A}_{\mathfrak{m}}}{(x-\overset{2}{a})^{\mathfrak{m}}}\right\} + \cdots \\ & + \sum_{\mathfrak{m}=1,\ldots n_1}\left\{\frac{\overset{1}{B}_{\mathfrak{m}}}{(x-a_1)^{\mathfrak{m}}}\right\} + \sum_{\mathfrak{m}=1,\ldots n_2}\left\{\frac{\overset{2}{B}_{\mathfrak{m}}}{(x-a_2)^{\mathfrak{m}}}\right\} + \cdots \\ & + \sum_{\mathfrak{m}=1,\ldots n}\{C_{\mathfrak{m}}x^{\mathfrak{m}-1}\},\end{aligned}$$

wo $m_1, m_2, \ldots, n, n_1, n_2, \ldots$ ganze positive Zahlen (Null ausgeschlossen) und $\overset{1}{A}_{\mathfrak{m}}, \overset{2}{A}_{\mathfrak{m}}, \ldots, \overset{1}{B}_{\mathfrak{m}}, \overset{2}{B}_{\mathfrak{m}}, \ldots, C_{\mathfrak{m}}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ Constanten bedeuten, und angenommen wird, dass $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \ldots$ nicht zu den Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{2\varrho+1}$, den Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$, gehören.

Nun ist

$$\begin{aligned}(10.)\qquad d\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{\mathfrak{m}}} &= \left(\frac{1}{2}\frac{R'(x)}{(x-a)^{\mathfrak{m}}} - \mathfrak{m}\frac{R(x)}{(x-a)^{\mathfrak{m}+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \\ &= \sum_{\mathfrak{r}=0,\ldots 2\varrho+1}\left\{\left(\frac{\mathfrak{r}}{2}-\mathfrak{m}\right)R^{(\mathfrak{r})}(a)(x-a)^{-\mathfrak{m}+\mathfrak{r}-1}\right\}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},\end{aligned}$$

wenn man

$$R(x) = \sum_{\mathfrak{r}=0,\ldots 2\varrho+1} R^{(\mathfrak{r})}(a)(x-a)^{\mathfrak{r}}$$

setzt. Da nun $R^{(0)}(a) = R(a)$ ist, so übersieht man aus dieser Formel sofort, dass sich, wenn $R(a)$ nicht Null ist, indem man $\mathfrak{m} = 1, 2, \ldots m-1$ setzt,

$$(11.)\quad \frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R(x)}} \text{ auf die Form } \left(\frac{G_0}{x-a} + G_1(x)\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + d\,\frac{G_2(x)\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{m-1}}$$

wird bringen lassen, wo G_0 eine Constante, $G_1(x)$ und $G_2(x)$ aber ganze Functionen von x bedeuten, die erste vom $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ und die zweite vom $(m-2)^{\text{ten}}$ Grade, wobei man für $m = 1$ $G_0 = 1$, $G_1(x) = 0$, $G_2(x) = 0$ hat.

Setzt man aber $a = a_\alpha$, so ist $R(a) = 0$, nicht aber $(\frac{1}{2}-\mathfrak{m})R^{(\mathfrak{m})}(a)$, und es erhellt aus der Formel (10.), wenn man jetzt $\mathfrak{m} = 1, 2, \ldots m$ nimmt, dass man

$$(12.)\quad \frac{dx}{(x-a_\alpha)^m\sqrt{R(x)}} = \frac{G_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + d\,\frac{G_2(x)\sqrt{R(x)}}{(x-a_\alpha)^m}$$

erhalten muss, wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ wieder ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ und die andere vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade. Namentlich hat man

$$(13.)\quad \frac{1}{2}\frac{R'(a_\alpha)\,dx}{(x-a_\alpha)\sqrt{R(x)}} = \left(\frac{1}{2}\frac{R'(x)}{x-a_\alpha} + \frac{1}{2}\frac{R'(a_\alpha)}{x-a_\alpha} - \frac{R(x)}{(x-a_\alpha)^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - d\,\frac{\sqrt{R(x)}}{x-a_\alpha}.$$

Ferner ist

$$d(x^{m-1}\sqrt{R(x)}) = \frac{(m-1)\,x^{m-2}R(x) + \frac{1}{2}x^{m-1}R'(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

oder, wenn man

$$R(x) = \sum_{\mathfrak{r}=0,\ldots 2\varrho+1} A_\mathfrak{r} x^{2\varrho+1-\mathfrak{r}}$$

setzt,

$$(14.)\quad d(x^{m-1}\sqrt{R(x)}) = \sum_{\mathfrak{r}=0,\ldots 2\varrho+1}\left[\left(\varrho + m - \frac{\mathfrak{r}+1}{2}\right)A_\mathfrak{r} x^{2\varrho+m-\mathfrak{r}-1}\right]\frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

und man hat daher

$$(15.)\quad \frac{x^{2\varrho-1+m}\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \frac{G_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + d(G_2(x)\sqrt{R(x)}),$$

wo gleichfalls $G_1(x)$, $G_2(x)$ ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ und die andere vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Aus den Formeln (11.), (12.), (15.) folgt nun sofort, dass sich

(16.) $$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ auf die Form}$$

$$\left(\frac{\overset{1}{G}_0}{x-\overset{1}{a}}+\frac{\overset{2}{G}_0}{x-\overset{2}{a}}+\cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\frac{\overset{2\varrho-1}{G}(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+d\left[\left(G_0(x)+\frac{G(x)}{R_0(x)\,H(x)}\right)\sqrt{R(x)}\right]$$

bringen lässt, wo $\overset{1}{G}_0, \overset{2}{G}_0, \ldots$ Constanten,

$$H(x) = (x-\overset{1}{a})^{m_1-1}(x-\overset{2}{a})^{m_2-1}\ldots,$$
$$R_0(x) = (x-a_1)^{n_1}\quad(x-a_2)^{n_2}\quad\ldots,$$

und $\overset{2\varrho-1}{G}(x)$, $G(x)$, $G_0(x)$ ganze Functionen sind, von denen die erste von nicht höherem als dem $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade, die zweite von einem niedrigern als $R_0(x)\,H(x)$ ist, und die dritte sich auf Null reducirt, wenn $n \leqq 2\varrho$, während sie vom $(n-2\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, sobald $n > 2\varrho$.

Da man ferner

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} = \frac{P(x)}{P(a)}\cdot\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} - \frac{P(x)-P(a)}{(x-a)\,P(a)}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

hat, wo $\frac{P(x)-P(a)}{x-a}$ eine ganze Function $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, und man, wenn $f(x)$ eine Function $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet,

$$f(x) = f_1(x)\,P(x)+f_2(x)$$

setzen kann, wo $f_1(x), f_2(x)$ beide vom $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grade sind, und

$$f_2(x) = \sum\frac{f_2(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})}\cdot\frac{P(x)}{x-a_\mathfrak{b}}$$

ist; so erhellt, dass man dem Differential $\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ auch die Form

(17.)
$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = F_1\frac{\sqrt{R(\overset{1}{a})}}{2P(\overset{1}{a})}\cdot\frac{P(x)}{x-\overset{1}{a}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+F_2\frac{\sqrt{R(\overset{2}{a})}}{2P(\overset{2}{a})}\cdot\frac{P(x)}{x-\overset{2}{a}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots$$
$$+\sum_{\mathfrak{b}=1,\ldots\varrho}\left(\frac{1}{2}\,G_\mathfrak{b}\frac{x^{\mathfrak{b}-1}P(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\right)+\sum_{\mathfrak{b}=1,\ldots\varrho}\left(\frac{1}{2}\,H_\mathfrak{b}\frac{P(x)}{x-a_\mathfrak{b}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\right)$$
$$+d\left\{\left(G_0(x)+\frac{G(x)}{R_0(x)\,H(x)}\right)\sqrt{R(x)}\right\}$$

geben kann, wo $F_1, F_2, \ldots, G_\mathfrak{b}, H_\mathfrak{b}$ Constanten bedeuten.

Nun folgt aus der Gleichung (1.)

$$(18.) \qquad \sum_a \left\{ \frac{1}{2} \frac{x_a^{\mathfrak{b}-1} P(x_a)\, dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} \right\} = d \left[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}} \mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho) \right]_{a^{-\mathfrak{b}}},$$

wo $\left[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}} \mathfrak{A}(u_1, \ldots)\right]_{a^{-\mathfrak{b}}}$ den Coefficienten von $a^{-\mathfrak{b}}$ in derjenigen Entwicklung der eingeklammerten Grösse, welche für sehr grosse Werthe von a gilt, bezeichnet. Aus den Formeln (2.), (6.) ersieht man, dass dieser Coefficient [indem

$$\frac{N(a, u_1, \ldots)}{M(a, u_1, \ldots)} \cdot \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} = 0$$

wird für $a = \infty$, und man daher für alle Werthe von a, die ihrem absoluten Betrage nach eine gewisse Grenze übersteigen,

$$\frac{P(a)}{2\sqrt{R(a)}} \log \left(\frac{M(a, u_1, \ldots) P(a) - N(a, u_1, \ldots)\sqrt{R(a)}}{M(a, u_1, \ldots) P(a) + N(a, u_1, \ldots)\sqrt{R(a)}} \right)$$
$$= -\mathrm{S}_{\mathfrak{m}=0,\ldots\infty} \left\{ \frac{1}{2\mathfrak{m}+1} \left(\frac{N(a, u_1, \ldots)}{M(a, u_1, \ldots)} \right)^{2\mathfrak{m}+1} \left(\frac{Q(a)}{P(a)} \right)^{\mathfrak{m}} \right\}$$

hat, so wie auch (nach (2.))

$$\frac{2\mu P(a)}{\sqrt{R(a)}} \mathfrak{A}\left(\frac{u_1}{2\mu}, \cdots \right) = 2\mu \mathrm{S}_{\mathfrak{m}=0,\ldots\infty} \left[\mathfrak{U}\left(a, \frac{u_1}{2\mu}, \cdots \right)_{2\mathfrak{m}+\mathfrak{s}} \right],$$

und die in Beziehung auf a rationalen Functionen

$$\left(\frac{N(a, u_1, \ldots)}{M(a, u_1, \ldots)} \right)^{2\mathfrak{m}+1} \left(\frac{Q(a)}{P(a)} \right)^{\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{U}\left(a, \frac{u_1}{2\mu}, \cdots \right)_{2\mathfrak{m}+\mathfrak{s}},$$

wenn man sie nach fallenden Potenzen von a entwickelt, beide mit einem Gliede anfangen, welches mit $a^{-\mathfrak{m}-1}$ multiplicirt ist] eine eindeutige ungerade Function von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ ist, welche für alle Werthe dieser Grössen, die ihrem absoluten Betrage nach beliebig festgesetzte Grenzen nicht überschreiten, als Quotient zweier, nach ganzen positiven Potenzen derselben entwickelbarer Reihen dargestellt werden kann.

Berücksichtigt man ferner, dass

$$\sum (f(x_a)\sqrt{R(x_a)}) = -\sum f(x_a)\psi(x_a),$$

wenn $f(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, rational durch die Coefficienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dargestellt werden kann; so ergiebt sich, wenn man

$$(19.) \qquad \left[\frac{-P(a)}{\sqrt{R(a)}}\mathfrak{A}(u_1, \ldots)\right]_{a=b} = \mathfrak{A}^{(b)}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)$$

setzt, aus (17.)

$$(20.) \quad \int \Sigma \frac{F(x_a)\,dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = F_1 \mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho; \overset{1}{a}) + F_2 \mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho; \overset{2}{a}) + \cdots$$
$$+ \Sigma(G_b \mathfrak{A}^{(b)}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho) + H_b u_b)$$
$$+ \mathfrak{F}(\mathrm{al}(u_1, \ldots)_a, \overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_a),$$

wo $\mathfrak{F}$ eine rationale Function von $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$, $\overline{\mathrm{al}}(u_1, \ldots)_1$ u. s. w. bedeutet. Man sieht also, dass in der That, wie oben bemerkt worden, eine jede Abel'sche Integral-Function auf die mit $\mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)$ bezeichnete zurückgeführt werden kann.

Es ist in § 4 bei Herleitung der dortigen Gleichung (8.) die Formel

$$\varphi'(x_a)\,dx_a = -2\sum_b \frac{\varphi(a_b)\sqrt{R(x_a)}}{(x_a - a_b)\,P'(a_b)}\,du_b,$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = -\sum_b \frac{\varphi(a_b)}{P'(a_b)} \cdot \frac{du_b}{(x_a - a_b)\,\varphi'(x_a)}$$

gefunden worden. Diese Gleichung werde mit $\frac{P(x_a)}{x_a - a}$ auf beiden Seiten multiplicirt, so findet sich, wenn man dann in Beziehung auf a summirt,

$$\Sigma \frac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a - a} \cdot \frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = -\sum_{a,b} \frac{\varphi(a_b)}{P'(a_b)} \cdot \frac{P(x_a)\,du_b}{(x_a - a)(x_a - a_b)\,\varphi'(x_a)}.$$

Nun ist aber

$$\frac{P(x)}{(x-a)\,\varphi(x)} = \frac{P(a)}{(x-a)\,\varphi(a)} + \Sigma \frac{P(x_a)}{(x_a - a)(x - x_a)\,\varphi'(x_a)},$$

und daher für $x = a_b$

$$\sum_a \frac{P(x_a)}{(x_a - a)(x_a - a_b)\,\varphi'(x_a)} = -\frac{P(a)}{(a - a_b)\,\varphi(a)}.$$

Mithin

$$\Sigma \frac{1}{2}\frac{P(x_a)}{x_a - a} \cdot \frac{dx_a}{\sqrt{R(x_a)}} = \Sigma \frac{P(a)}{\varphi(a)} \cdot \frac{\varphi(a_a)}{P'(a_b)} \cdot \frac{du_b}{a - a_b},$$

oder auch, wenn man jetzt auf der rechten Seite $\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{b}$ schreibt,

$$(21.) \qquad \Sigma \frac{1}{2} \frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = \Sigma \frac{P(a)}{\varphi(a)} \cdot \frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{du_\mathfrak{a}}{a - a_\mathfrak{a}}$$

$$= \frac{\Sigma \left\{ - \frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{a} \, du_\mathfrak{a}}{a - a_\mathfrak{a}} \right\}}{1 - \Sigma \left\{ \frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{a}}{a - a_\mathfrak{a}} \right\}}.$$

Hieraus folgt

$$(22.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)}{\partial u_\mathfrak{b}} = \frac{\sqrt{R(a)}}{(a - a_\mathfrak{b}) P(a)} \cdot \frac{\frac{-Q(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{b}}{1 - \Sigma \left\{ \frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_\mathfrak{a}}{a - a_\mathfrak{a}} \right\}}.$$

Ferner ersieht man aus der Gleichung (21.), dass die partiellen Differential-Coefficienten von $\mathfrak{A}^{(1)}(u_1, \ldots)$, $\mathfrak{A}^{(2)}(u_1, \ldots)$ u. s. w. rationale und ganze Functionen von $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_2$, $\ldots$ $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\varrho$ sind. Namentlich hat man

$$(23.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}^{(1)}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)}{\partial u_\mathfrak{a}} = \frac{Q(a_\mathfrak{a})}{P'(a_\mathfrak{a})} \mathrm{al}^2(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_\mathfrak{a},$$

so dass man die Gleichung (III.) des § 4, deren Wurzeln die Grössen x_1, x, $\ldots$ x_ϱ sind, auch folgendermassen

$$(24.) \qquad \Sigma \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}^{(1)}(u_1, u_2, \ldots u_\varrho)}{(x - a_\mathfrak{a}) \partial u_\mathfrak{a}} \right\} = 1$$

ausdrücken kann.

Zweites Kapitel.

Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischer Functionen durch Reihen.

§ 7.

Die im vorhergehenden Kapitel durchgeführten Untersuchungen haben hauptsächlich den Zweck, für die Functionen

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha, \qquad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta}, \qquad \mathfrak{A}(u_1, \ldots; a), \qquad \mathfrak{A}^{(a)}(u_1, \ldots),$$

durch welche sich, wie gezeigt worden ist, alle Abel'schen Transcendenten

ausdrücken lassen, zu einer völlig bestimmten, auf beliebige Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ anwendbaren Erklärung zu führen, und die analytische Form derselben in so weit festzustellen, als hierfür und zum Behufe der weitern Entwicklungen erforderlich ist. Die in § 4 und § 6 gegebenen Formeln genügen für diesen Zweck zwar vollständig, nicht aber, wenn verlangt wird, die genannten Grössen in einer ihrem wahren analytischen Charakter entsprechenden, für alle Werthe der Argumente $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ unverändert dieselbe bleibenden Form darzustellen. Diese bleibt vielmehr noch zu ermitteln.

Der Umstand, dass die unendlichen Reihen, welche in den Formeln ((IV.), (XIII.), § 4) und (6, § 6) vorkommen, für um so grössere Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ convergent bleiben, je grösser man die Zahl μ annimmt, begründet die Vermuthung, es werde sich jede derselben, wenn $\mu = \infty$ gesetzt wird, in eine für alle Werthe der genannten Veränderlichen convergirende Reihe verwandeln, und sich auf diese Weise eine Darstellung der in Rede stehenden Functionen in der gesuchten Form ergeben. Es dürfte vielleicht möglich sein, durch eine genauere Untersuchung jener Reihen die Richtigkeit dieser Vermuthung strenge zu erweisen; ich gehe jedoch hierauf nicht ein, weil man, wenn es auch gelänge, dadurch noch nicht dahin kommen würde, für jede einzelne der beiden Functionen, als deren Quotient alsdann irgend eine Abel'sche Function sich darstellen liesse, eine analytische Definition zu gewinnen. Es tritt uns hier vielmehr eine Aufgabe entgegen, welche, so viel ich weiss, noch nicht allgemein behandelt worden, und doch für die Theorie der Functionen von besonderer Wichtigkeit ist.

Die einfachsten transcendenten Functionen sind solche, welche sich nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen und somit im Wesentlichen den Charakter der ganzen rationalen Functionen besitzen. Nach ihnen kommen diejenigen, welche aus mehreren dieser Art in rationaler Weise zusammengesetzt und daher als Quotienten aus zweien dargestellt werden können. Man kann sie als transcendente Grössen vom Charakter der gebrochenen rationalen Functionen bezeichnen.

Oftmals aber ist eine Function in der Art definirt — und so verhält es sich, der vorhergehenden Darstellung nach, mit den Abel'schen —, dass zwar die Möglichkeit gegeben ist, sobald jedes ihrer Argumente auf einen

endlichen, übrigens beliebig gross anzunehmenden Bereich beschränkt wird, dieselbe in der Gestalt eines Bruches, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen der Argumente entwickelte Reihen sind, auszudrücken, während eine stets gültig bleibende Darstellungsform noch unbekannt ist. Angenommen nun, es sei eine derartige Function durch eine (algebraische) Differential-Gleichung definirt (oder auch im Vereine mit andern durch mehrere solche), so kann man untersuchen, ob sie vielleicht zu den gebrochenen rationalen, in dem eben erklärten Sinne, gehöre. Hierfür aber reichen die gewöhnlichen Entwicklungs-Methoden nicht aus. Es handelt sich dann darum, zu entscheiden, ob man, nachdem in die gegebene Differential-Gleichung statt der gesuchten Function ein Bruch, dessen Zähler und Nenner noch zu bestimmende Grössen sind, eingeführt worden, dieselbe in zwei andere, aus denen sie wieder folgt, so zerfällt werden könne, dass die genannten Grössen beide den Charakter einer ganzen Function erhalten. Dazu kann man in vielen Fällen mit Hülfe eines allgemeinen Satzes gelangen, der verdient, bei dieser Gelegenheit entwickelt zu werden.

Wenn $f(u)$ eine Function von u ist, welche durch eine nur ganze positive Potenzen dieser Veränderlichen enthaltende und beständig convergirende Reihe dargestellt werden kann, so wird der Differential-Quotient

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda},$$

wo λ eine ganze positive Zahl bezeichnet, nur für solche Werthe von u unendlich gross, bei denen $f(u)$ verschwindet. Es sei a einer dieser Werthe, so kann man setzen

$$f(a+k) = gk^m + g_1 k^{m+1} + \cdots,$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeutet und g nicht Null ist, und hat also

$$\log f(a+k) = m \log k + \log g + \frac{g_1}{g} k + \cdots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder nur positive ganze Potenzen von k enthalten; woraus folgt

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit nur positiven ganzen Potenzen von } k\},$$

welche Reihe convergirt, sobald der absolute Betrag von k kleiner ist als eine gewisse Grösse, auf deren nähere Bestimmung es nicht ankommt. Dieselbe Darstellung gilt aber auch für jeden andern Werth von a; nur ist dann $m = 0$.

Dieser Satz lässt sich nun in folgender Weise umkehren.

Theorem.

Wenn eine eindeutige Function $F(u)$ der unbeschränkt veränderlichen Grösse u die Eigenschaft besitzt, dass

$$F(a+k),$$

wo a irgend einen besondern Werth von u, k aber eine Veränderliche bezeichnet, für hinlänglich kleine Werthe der letztern in eine convergirende Reihe von der Form

$$m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \mathrm{S}h_\mathfrak{m} k^\mathfrak{m}, \qquad \mathfrak{m} = 0, \ldots \infty$$

wo m entweder Null oder eine ganze positive Zahl bedeuten soll, entwickelbar ist; so lässt sich eine beständig convergirende Reihe

$$f_0 u^\mu + f_1 u^{\mu+1} + \cdots + f_\mathfrak{m} u^{\mu+\mathfrak{m}} + \cdots = f(u),$$

in der μ den zu $a = 0$ gehörigen Werth von m bezeichnet, dergestalt bestimmen, dass

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$$

ist. Und zwar erhält man den allgemeinsten Ausdruck von $f(u)$, indem man, unter der Voraussetzung, dass für hinlänglich kleine Werthe von u

$$F(u) = \mu\frac{\partial^\lambda \log u}{\partial u^\lambda} + \mathrm{S}F_\mathfrak{m} u^\mathfrak{m} \qquad \mathfrak{m} = 0, \ldots \infty$$

gefunden sei, die Formel

$$u^\mu e^{\mathrm{S}\left\{\frac{F_\mathfrak{m} u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\ldots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\} + C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1}},$$

in der $C_0, C_1, \ldots C_{\lambda-1}$ willkürliche Constanten bezeichnen, nach

Potenzen von u entwickelt, wenn auch die dabei gebrauchte Reihe

$$S\left\{\frac{F_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\dots(m+\lambda)}\right\}$$

nicht für alle Werthe von u convergirt.

Beweis. Es seien $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ unter den Werthen von u, für welche $F(u)$ unendlich gross wird, diejenigen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig angenommene Grösse U sind, den Werth Null, wenn er auch zu denselben gehört, ausgeschlossen. Es ist leicht zu erweisen, dass es nur eine endliche Anzahl solcher Werthe geben kann. Denn sonst müsste sich in dem angegebenen Bereiche von u wenigstens ein Werth a finden, in dessen Nähe eine unbegrenzte Menge derselben vorhanden wäre. Dann aber liesse sich $F(a+k)$, wie klein auch k angenommen werde, nicht nach ganzen Potenzen dieser Grösse in eine convergirende Reihe entwickeln, die, wie doch vorausgesetzt wird, nur eine endliche Zahl Glieder mit negativen Potenzen von k enthält. Bezeichnet man nun mit $m_1, m_2, \dots m_\sigma$ die zu $a_1, a_2, \dots a_\sigma$ gehörigen Werthe der Zahl m in den Entwicklungen von

$$F(a_1+k), \quad F(a_2+k), \quad \dots \quad F(a_\sigma+k),$$

und setzt

$$u^\mu\left(1-\frac{u}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{u}{a_2}\right)^{m_2}\cdots\left(1-\frac{u}{a_\sigma}\right)^{m_\sigma} = \pi(u),$$

so hat man nach dem oben Bemerkten

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit ganzen positiven Potenzen von } k\},$$

wo $m = \mu, m_1, m_2, \dots m_\sigma$ ist für $a = 0, a_1, a_2, \dots a_\sigma$, und Null für jeden andern Werth von a. Setzt man daher

$$F(u) - \frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda} = F_1(u),$$

so ist $F_1(a+k)$ bei jedem Werthe von a, dessen absoluter Betrag kleiner als U ist, in eine nur ganze positive Potenzen von k enthaltende Reihe entwickelbar. Daraus folgt, dass $F_1(u)$, so lange der absolute Betrag von u unterhalb der genannten Grenze bleibt, stets einen endlichen Werth hat und

sich continuirlich mit u ändert. Dasselbe gilt von $\frac{\partial F_1(u)}{\partial u}$ (so wie von den höhern Differential-Coefficienten dieser Function). Nach einem Cauchy'schen Satze lässt sich daher $F_1(u)$ für alle jene Werthe von u durch eine convergirende Reihe

$$\mathrm{S}\, G_m u^m \qquad m = 1, \ldots \infty$$

darstellen. Wird daher

$$f_1(u) = \pi(u)\, e^{\mathrm{S}\left\{\frac{G_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\ldots(m+\lambda)}\right\}}$$

gesetzt, so ist $f_1(u)$ in eine, jedenfalls für dieselben Werthe von u convergirende Reihe von der Form

$$f_1(u) = u^\mu + \mathrm{S}\overset{1}{f}_m u^{\lambda+m} \qquad m = 0, \ldots \infty$$

entwickelbar,*) und man hat

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log \pi(u)}{\partial u^\lambda} + F_1(u) = F(u).$$

Nun kann man aber, wenn u dem absoluten Betrage nach kleiner als jede der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ ist, $F(u)$ durch eine convergirende Reihe

$$\mu \frac{\partial^\lambda \log u}{\partial u^\lambda} + \mathrm{S} F_m u^m$$

ausdrücken, wo μ Null oder eine ganze positive Zahl ist. Nimmt man daher für $f(u)$ die aus der Entwicklung des Ausdrucks

$$u^\mu\, e^{\mathrm{S}\left\{\frac{F_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\ldots(m+\lambda)}\right\}} + C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1}$$

hervorgehende Reihe, so convergirt dieselbe sicher bei den eben genannten Werthen von u, und man hat für dieselben

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u),$$

und mithin auch

$$\frac{\partial^\lambda \log f(u)}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda},$$

*) S. die Sätze des § 7 der Abhandlung über die Facultäten.

woraus durch Integration

$$\log f(u) = \log f_1(u) + C_0' + C_1' u + \cdots + C_{\lambda-1}' u^{\lambda-1},$$
$$f(u) = f_1(u) \cdot e^{C_0' + C_1' u + \cdots + C_{\lambda-1}' u^{\lambda-1}}$$

folgt, wo $C_0', C_1', \ldots C_{\lambda-1}'$ gleich $C_0, C_1, \ldots C_{\lambda-1}$ Constanten sind, und aus den für $f(u)$ und $f_1(u)$ aufgestellten Ausdrücken sofort erhellt, dass man, wenn

$$\log\left(\frac{\pi(u)}{u^\mu}\right) = c_1 u + c_2 u^2 + \cdots$$

ist,

$$C_0' + C_1' u + \cdots + C_{\lambda-1}' u^{\lambda-1} = C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1} - c_1 u - \cdots - c_{\lambda-1} u^{\lambda-1}$$

hat. Der Exponential-Factor in dem vorstehenden Ausdrucke von $f(u)$ lässt sich aber nach Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickeln; folglich muss auch das Product aus derselben und der Reihe für $f_1(u)$, das heisst die mit $f(u)$ bezeichnete Reihe convergiren, sobald der absolute Werth von u kleiner als U ist. Aber U kann beliebig gross angenommen werden, während die Coefficienten von $f(u)$ stets dieselben bleiben, welchen Werth auch U haben möge. Mithin muss die Reihe für $f(u)$ eine beständig convergirende sein, wenn auch die bei der Bildung ihrer Coefficienten gebrauchte

$$S\left\{\frac{F_m u^{\lambda+m}}{(m+1)\ldots(m+\lambda)}\right\}$$

es nicht ist.

Zugleich sieht man aus der vorhergehenden Darstellung, dass die aufgestellte Formel den allgemeinsten Ausdruck der Function $f(u)$ liefert. Denn gesetzt, es sei $f_0(u)$ irgend eine andere, welche auch der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^\lambda \log f_0(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$$

genügt, so muss, wie gezeigt,

$$f_0(u) = f(u)\, e^{\chi(u)}$$

sein, wo $\chi(u)$ eine ganze Function $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, wonach $f_0(u)$ in dem für $f(u)$ gegebenen Ausdrucke mit einbegriffen ist.

Anmerkung. Hätte die Function $F(u)$ nicht für alle Werthe von u, sondern nur für alle dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen

Grenze liegenden, die angegebenen Eigenschaften; so folgt aus dem vorstehenden Beweise, dass die auf die angezeigte Weise gebildete Reihe $f(u)$ jedenfalls für die bezeichneten Werthe von u convergent sein und der Differential-Gleichung $\frac{\partial^\lambda f(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$ genügen würde.

Der bewiesene Satz kann nun, wenn zwischen zwei veränderlichen Grössen x und u eine algebraische Differential-Gleichung besteht, dazu gebraucht werden, um zu entscheiden, ob sich wirklich x als eine Function von u, die den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen hat, betrachten lasse, und um, wenn das Letztere der Fall ist, zur Bestimmung des Zählers und des Nenners zwei Differential-Gleichungen zu ermitteln. Denn immer wird sich aus der gegebenen Differential-Gleichung für irgend einen λ^{ten} Differential-Coefficienten von $\log x$ ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda} = F\left(u, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \cdots \frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial u^{\lambda-1}}\right)$$

herleiten lassen, wo F eine rationale Function von $x, \frac{\partial x}{\partial u}$ u. s. w. bezeichnen soll, deren Coefficienten Constanten oder eindeutige analytische Functionen von u sind. Wenn nun x in der Gestalt

$$\frac{f_1(u)}{f_2(u)},$$

wo unter $f_1(u), f_2(u)$ zwei nach ganzen positiven Potenzen von u in beständig convergirende Reihen entwickelbare Functionen zu verstehen sind, darstellbar sein soll, so muss, indem dann

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} - \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda}$$

ist, F sich auf die Form $F_1 - F_2$ in der Art bringen lassen, dass F_1, F_2 Functionen von der in dem aufgestellten Satze beschriebenen Art sind. Gelingt es nun, F in dieser Weise umzuformen, wo denn im Allgemeinen F_1, F_2 Functionen von $u, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \cdots \frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial u^{\lambda-1}}$ sein werden, und der Nachweis, dass sie die in Rede stehende Beschaffenheit haben, mit Hülfe dessen, was hinsichtlich des zwischen x und u bestehenden Abhängigkeits-Verhältnisses aus der gegebenen Differential-Gleichung folgt, oder sonst bekannt ist, geliefert

werden muss; so kann man

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = F_1, \qquad \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda} = F_2$$

setzen, und dann, indem man für x diejenige Entwicklung nach Potenzen von u sucht, welche für hinlänglich kleine Werthe von u gilt, und hierauf die entsprechenden Entwicklungen von F_1, F_2 ausführt, die Reihen für $f_1(u)$, $f_2(u)$ in der beschriebenen Weise bilden — oder man kann auch, in F_1, F_2 $\frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ statt x einführend, aus den so sich ergebenden Gleichungen die Coefficienten der gesuchten Reihen, deren Form und beständige Convergenz ja bereits vor ihrer Entwicklung feststeht, nach irgend einer passenden Methode ableiten; worauf man bei gehöriger Constanten-Bestimmung $x = \frac{f_1(u)}{f_2(u)}$ haben wird.

Wenn man im Stande ist, von der Grösse x vor ihrer Entwicklung nachzuweisen, dass sie eine eindeutige Function von u ist, welche sich für alle in der Nähe eines beliebigen besondern Werthes a liegenden Werthe dieses Arguments durch eine convergirende Reihe von der Form

$$A_0(u-a)^\mu + A_1(u-a)^{\mu+1} + A_2(u-a)^{\mu+2} + \cdots,$$

wo μ eine ganze (positive oder negative) Zahl bedeutet, ausdrücken lässt; so genügt es, F als die Differenz zweier andern ähnlich gebildeten Ausdrücke F_1, F_2 darzustellen, von denen sich zeigen lässt, dass der erste nur für solche Werthe von x unendlich gross werde, bei denen $x = 0$, der andere nur für diejenigen, bei denen $x = \infty$ wird — und man kann überzeugt sein, dass die aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(u)}{\partial u^\lambda} = F_1, \qquad \frac{\partial^\lambda \log f_2(u)}{\partial u^\lambda} = F_2$$

auf die beschriebene Weise für $f_1(u)$, $f_2(u)$ sich ergebenden Reihen beständig convergent sein werden.

Denn bei der angenommenen Beschaffenheit von x hat man für jeden Werth von a

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial u^\lambda}\right)_{u=a+k} = \pm m \frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit nur ganzen positiven Potenzen von } k\}$$
$$= F_1(a+k) - F_2(a+k),$$

wo m eine ganze positive Zahl ist, wenn für $u = a$ $x = 0$ oder $= \infty$ wird,

und das obere Zeichen im ersten, das untere im andern Falle gilt, während man $m = 0$ für jeden andern Werth von a hat. Ferner geben F_1, F_2, wenn man in denselben $u = a + k$ setzt und nach Potenzen von k entwickelt, Reihen mit nur ganzen Potenzen von k, wobei jedoch, da F_1 und F_2 für keinen Werth von u beide unendlich gross werden, niemals in beiden zugleich negative Potenzen von k vorkommen können. Daher folgt aus der vorstehenden Gleichung, wenn $F_1(a) = \infty$ ist (indem man mit (k) eine Reihe von der Form $h_0 + h_1 k + h_2 k^2 + \cdots$ andeutet),

$$F_1(a+k) = m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + (k), \qquad F_2(a+k) = (k);$$

und wenn $F_2(a) = \infty$,

$$F_2(a+k) = m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + (k), \qquad F_1(k) = (k),$$

während man für jeden andern Werth von a

$$F_1(a+k) = (k), \qquad F_2(a+k) = (k)$$

hat. Es besitzen also $F_1(u)$, $F_2(u)$ die bei dem entwickelten Satze für die Function $F(u)$ vorausgesetzte Beschaffenheit.

Wenn sich nur nachweisen liesse, dass man x für alle Werthe von u, die dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen Grenze liegen, als eine Function dieser Veränderlichen von der angegebenen Beschaffenheit anzusehen habe; so würde man, in der beschriebenen Weise verfahrend, zu einer jedenfalls für alle jene Werthe von u geltenden Darstellung von x gelangen.

Sind für mehrere Functionen $x_1, x_2, \ldots$ von u eben so viele algebraische Differential-Gleichungen gegeben, so kann man bei deren Entwicklung in ganz ähnlicher Weise verfahren. Auch ist es möglich, in dem Falle, wo es sich um Functionen von mehr als einem Argumente handelt, die Untersuchung auf den hier betrachteten zurückzuführen.

ANMERKUNG.

Im Vorstehenden ist nur ein Theil der im Crelle'schen Journal Bd. 52 unter dem Titel »Theorie der Abel'schen Functionen« veröffentlichten Abhandlung abgedruckt worden, weil die Theorie der hyperelliptischen Functionen in einem folgenden Bande dieser Werke in neuer Bearbeitung erscheinen soll, die Digression über die elliptischen Transcendenten aber ihrem wesentlichen Inhalt nach mit der ersten Abhandlung dieses Bandes übereinstimmt.

Die Mehrzahl der in diesem Bande enthaltenen Abhandlungen ist vor dem Abdruck einer Revision unterworfen worden, und zwar durch die Herren G. Hettner (Nr. 11), H. Kortum (Nr. 16), H. v. Mangoldt (Nr. 9), R. Rothe (Nr. 2, 3, 12, 15), Ludwig Schlesinger (Nr. 5, 7, 8, 17), H. A. Schwarz (Nr. 14), E. Wendt (Nr. 13). Auch hat jeder dieser Herren mindestens eine Correctur des von ihm durchgesehenen Textes gelesen. Die Correctur der übrigen Abhandlungen ist durch Herrn R. Rothe besorgt worden. Hinsichtlich des Typographischen hat Herr C. Barich, Factor der G. Reimer'schen Buchdruckerei, sämmtliche Bogen dieses Bandes revidirt.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
3
W45
Bd.1

Weierstrass, Karl Theodor
Wilhelm
Mathematische werke

Physical &
Applied Sci.